

Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive

Xavier Buff, Arnaud Chéritat

Laboratoire Émile Picard, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse

Résumé

Dans cette note, nous prouvons une variante d'une conjecture énoncée dans la thèse du second auteur [C]. La preuve est basée sur des résultats annoncés par Inou et Shishikura [S], ainsi que sur des travaux plus anciens de McMullen [McM] et du second auteur [C]. D'après [C], cela permet de compléter un plan initié par Douady et de prouver l'existence de polynômes quadratiques dont l'ensemble de Julia est de mesure strictement positive. *Pour citer cet article : X. Buff, A. Chéritat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

Abstract

Quadratic Julia sets with positive Lebesgue measure. In this note, we prove a variant of a conjecture stated in the thesis of the second author [C]. The proof is based on results announced by Inou and Shishikura [S], and on older results of McMullen [McM] and the second author [C]. By [C], this allows to complete a plan initiated by Douady and to show that there exist quadratic polynomials having a Julia set of positive Lebesgue measure. *To cite this article: X. Buff, A. Chéritat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

Abridged English version

For $\alpha \in \mathbb{R}$, we note P_α the quadratic polynomial $z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z + z^2$, K_α its filled-in Julia set and J_α its Julia set. Given an irrational number θ , we note $t_n = p_n/q_n$ the approximants of θ given by the continued fraction algorithm. For P_{t_n} , we can define repelling petals at $z = 0$. The quotient by P_{t_n} of the union of repelling petals is a cylinder isomorphic to \mathbb{C}/\mathbb{Z} called the Écalle repelling cylinder. The basin of infinity for P_{t_n} intersects the repelling petals and we call A_n its image in \mathbb{C}/\mathbb{Z} via the isomorphism. The height of A_n is the real number $\sup_{Z \in A_n} \text{Im}(Z) - \inf_{Z \in A_n} \text{Im}(Z)$.

In his thesis [C], the second author shows that the existence of P_α with a Cremer point and with J_α of positive Lebesgue measure would follow from the following two conjectures.

Email addresses: xavier.buff@math.ups-tlse.fr (Xavier Buff), arnaud.cheritat@math.ups-tlse.fr (Arnaud Chéritat).

Conjecture 1 *If θ is a bounded type irrational, the height of A_n is bounded independently of n .*

Conjecture 2 *If θ is a bounded type irrational, the area of A_n tends to 0 as n tends to ∞ .*

In this note, we are able to prove those two conjectures under the additional hypothesis that all the coefficients in the continued fraction of θ are larger than some N . This remains sufficient to conclude in the same way as in [C].

Our proof is based on the following results:

- if θ is a bounded type irrational, every point of the boundary of the Siegel disk of P_θ is a measurable deep point of K_θ [McM],
- as n tends to ∞ , the Lebesgue measure of K_{t_n} tends to that of K_θ [C],
- there is a class of maps introduced in [S] which is compact and invariant under some renormalisation operator.

We thank A. Douady and M. Shishikura for many discussions. We also thank M. Yampolsky for the particularly fruitful exchanges we had with him.

1. Introduction

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note P_α le polynôme quadratique $z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z + z^2$, K_α son ensemble de Julia rempli et J_α son ensemble de Julia. Étant donné un nombre irrationnel θ , on note $t_n = p_n/q_n$ les réduites de θ données par l’algorithme des fractions continues. Pour P_{t_n} , on peut définir des pétales répulsifs en $z = 0$. Le quotient de la réunion des pétales répulsifs par P_{t_n} est un cylindre isomorphe à \mathbb{C}/\mathbb{Z} appelé le cylindre d’Écalles répulsif. On appelle A_n la trace du bassin de l’infini de P_{t_n} dans \mathbb{C}/\mathbb{Z} via un isomorphisme avec le cylindre d’Écalles répulsif. La hauteur de A_n est le réel $\sup_{Z \in A_n} \text{Im}(Z) - \inf_{Z \in A_n} \text{Im}(Z)$.

Dans sa thèse [C], le second auteur montre que l’existence de P_α ayant un point de Cremer et tels que J_α soit de mesure de Lebesgue > 0 découle des deux conjectures suivantes.

Conjecture 1 *Si θ est un irrationnel de type constant, la hauteur de A_n est bornée indépendamment de n .*

Conjecture 2 *Si θ est un irrationnel de type constant, l’aire de A_n tend vers 0 lorsque n tend vers l’infini.*

Dans cette note, nous parvenons à démontrer ces deux conjectures sous l’hypothèse additionnelle que les coefficients de la décomposition en fraction continue de θ sont tous plus grands qu’un certain N . Ceci reste suffisant pour conclure de la même manière que dans [C].

Nous verrons que sous cette hypothèse, la première conjecture est une conséquence immédiate de résultats annoncés par Inou et de Shishikura [S]. Nous allons expliquer comment démontrer la deuxième conjecture en combinant des résultats de McMullen [McM], de la thèse du second auteur [C], et des résultats annoncés par Inou et Shishikura [S].

Nous remercions A. Douady et M. Shishikura pour de nombreuses discussions. Nous remercions également M. Yampolsky pour les échanges particulièrement fructueux que nous avons eu avec lui.

2. Prérequis

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un irrationnel de type constant. Le polynôme $P_\theta : z \mapsto e^{2i\pi\theta}z + z^2$ est linéarisable en 0. On note Δ_θ son disque de Siegel. Le résultat de McMullen que nous utiliserons est le

Théorème 2.1 (McMullen [McM]) *Pour tout $\rho < 1$ et tout $z \in \partial\Delta_\theta$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\text{Leb}(D(z, \varepsilon) \cap K_\theta) \geq \rho \cdot \text{Leb}(D(z, \varepsilon))$, où Leb est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} .*



FIG. 1. Un zoom près du bord de Δ_θ pour $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$. On voit la densité élevée de K_θ près du disque de Siegel.

On sait que $K_{t_n} \rightarrow K_\theta$ pour la topologie de Hausdorff sur les compacts de \mathbb{C} [D]. Le résultat du second auteur que nous utiliserons est le

Théorème 2.2 (Chéritat–Jellouli [C]) *Lorsque n tend vers $+\infty$, $\text{Leb}(K_{t_n}) \rightarrow \text{Leb}(K_\theta)$.*

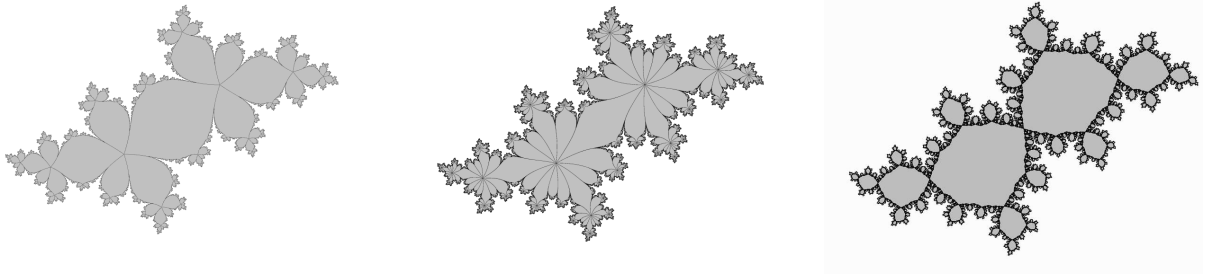


FIG. 2. Pour n grand, la mesure de Lebesgue de K_{t_n} est proche de celle de K_θ ; illustration pour $t_4 = 3/5$, $t_6 = 8/13$ et $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Exposons maintenant les résultats annoncés par Inou et Shishikura [S]. On considère le polynôme cubique $Q(z) = z(1 + z)^2$. Ce polynôme a un point fixe multiple en 0, un point critique en $-1/3$ qui s'envoie sur $-4/27$, et un deuxième point critique en -1 qui s'envoie sur 0. Dans toute la suite $R = e^{4\pi}$ et $v = -4/27$. Soit U l'ouvert défini par $U := Q^{-1}(D(0, |v|R)) \setminus (]-\infty, -1] \cup B)$, où B est la composante connexe de $Q^{-1}(D(0, |v|R))$ qui contient -1 . Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on considère la classe

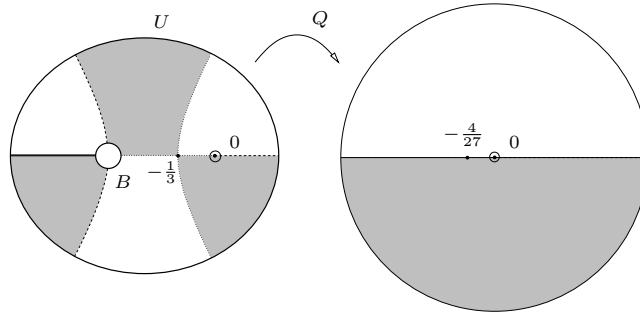


FIG. 3. Une représentation schématique de l'ensemble U . On a colorié en gris les points dont l'image par Q est contenue dans le demi-plan inférieur.

$$\mathcal{F}_\alpha := \left\{ f = Q \circ \varphi^{-1} : U_f \rightarrow \mathbb{C} \text{ avec } \begin{array}{l} \varphi : U \rightarrow U_f \text{ isomorphisme tel que} \\ \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi'(0) = e^{-2i\pi\alpha} \end{array} \right\}.$$

Remarque 1 L'ensemble \mathcal{F}_α s'identifie à l'espace \mathcal{S}_α des applications univalentes dans le disque unité fixant 0 avec dérivée $e^{-2i\pi\alpha}$, qui est compact.

Une application $f \in \mathcal{F}_\alpha$ fixe 0 avec multiplicateur $e^{2i\pi\alpha}$. L'application $f : U_f \rightarrow D(0, |v|R)$ est surjective. Ce n'est pas un revêtement ramifié. L'application f a une valeur critique en $v = -4/27$.

Théorème 2.3 (Inou–Shishikura [S]) *Tout $f \in \mathcal{F}_0$ a un point fixe en 0 de multiplicité 2. Il existe un pétale attractif $\mathcal{P}_{att,f}$ et une coordonnée de Fatou $\Phi_{att,f} : \mathcal{P}_{att,f} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que :*

- (i) $v \in \mathcal{P}_{att,f}$, $\Phi_{att,f}(v) = 1$ et $\Phi_{att,f}(\mathcal{P}_{att,f}) = \{Z ; \operatorname{Re}(Z) > 0\}$;
- (ii) si on pose $V_f := \{z \in \mathcal{P}_{att,f} ; \operatorname{Im}(\Phi_{att,f}(z)) > 0 \text{ et } 0 < \operatorname{Re}(\Phi_{att,f}(z)) < 2\}$
et $W_f := \{z \in \mathcal{P}_{att,f} ; |\operatorname{Im}(\Phi_{att,f}(z))| < 2 \text{ et } 0 < \operatorname{Re}(\Phi_{att,f}(z)) < 2\}$, alors, pour tout $f \in \mathcal{F}_0$ et pour tout $k > 0$,
 - l'unique composante connexe V_f^{-k} de $f^{-k}(V_f)$ qui contient 0 dans son adhérence est relativement compacte dans U_f et $f^k : V_f^{-k} \rightarrow V_f$ est un isomorphisme et
 - l'unique composante connexe W_f^{-k} de $f^{-k}(W_f)$ qui intersecte V_f^{-k} est relativement compacte dans U_f et $f^k : W_f^{-k} \rightarrow W_f$ est un revêtement de degré 2 ramifié au dessus de v .

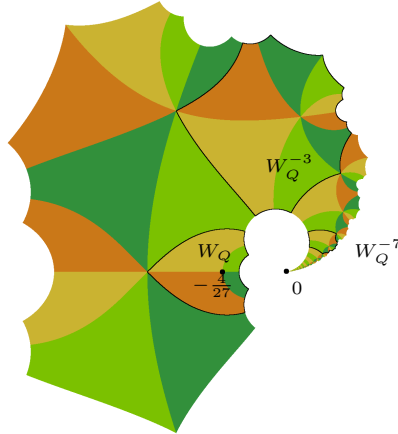


FIG. 4. L'ouvert W_Q et la réunion des W_Q^{-k} . On a marqué le bord des pièces W_Q , W_Q^{-3} et W_Q^{-7} . Pour une application $f \in \mathcal{F}_0$, la réunion de W_f et de ses préimages par f aura une structure similaire.

Remarque 2 Le domaine U_f contient une case d'échiquier parabolique : la réunion pour $k \geq 0$ des V_f^{-k} et des $f^k(V_f)$. Elle est invariante par f , adhère à 0, et la coordonnée de Fatou attractive s'y prolonge en une fonction univalente d'image le demi-plan supérieur. De même, U_f contient une case qui s'envoie sur le demi-plan inférieur.

Il suit alors facilement de la compacité de \mathcal{F}_0 qu'il existe des entiers $k_0, k_1 \leq k_0 - 2$ et N tel que si $0 < \alpha < 1/N$, alors pour tout $f \in \mathcal{F}_\alpha$, on peut définir un pétale perturbé \mathcal{P}_f (perturbation de la réunion des pétales attractifs et répulsifs) et une coordonnée de Fatou perturbée $\Phi_f : \mathcal{P}_f \rightarrow \mathbb{C}$ avec

- (i) $v \in \mathcal{P}_f$, $\Phi_f(v) = 1$, $\Phi_f(\mathcal{P}_f) = \{Z \in \mathbb{C} ; 0 < \operatorname{Re}(Z) < [1/\alpha] - k_1\}$ et $\operatorname{Im}(\Phi_f(z)) \rightarrow +\infty$ quand $z \in \mathcal{P}_f \rightarrow 0$;

- (ii) si V_f et W_f sont définis comme dans le théorème 2.3, alors pour $0 \leq k \leq k_0$
- l'unique composante connexe V_f^{-k} de $f^{-k}(V_f)$ qui contient 0 dans son adhérence est relativement compacte dans U_f et $f^k : V_f^{-k} \rightarrow V_f$ est un isomorphisme,
 - l'unique composante connexe W_f^{-k} de $f^{-k}(W_f)$ qui intersecte V_f^{-k} est relativement compacte dans U_f et $f^k : W_f^{-k} \rightarrow W_f$ est un revêtement de degré 2 ramifié au dessus de v et
- (iii) $V_f^{-k_0} \cup W_f^{-k_0} \subset \{z \in \mathcal{P}_f ; 2 < \operatorname{Re}(\Phi_f(z)) < \lfloor 1/\alpha \rfloor - k_1 - 2\}$.

Inou et Shishikura obtiennent alors aisément le

Théorème 2.4 (Inou-Shishikura [S]) *Si $f \in \mathcal{F}_\alpha$ avec $0 < \alpha < \frac{1}{N}$, l'application*

$$\Phi_f \circ f^{k_0} \circ \Phi_f^{-1} : \Phi_f(V_f^{-k_0} \cup W_f^{-k_0}) \rightarrow \Phi_f(V_f \cup W_f)$$

se projette via $Z \mapsto z = -\frac{4}{27}e^{2i\pi Z}$ en une application $\mathcal{R}(f) \in \mathcal{F}_{-1/\alpha}$.

La construction que nous venons de décrire fonctionne également pour les polynômes quadratiques P_α avec $\alpha > 0$ suffisamment proche de 0 (la seule différence étant que la valeur critique du polynôme P_α n'est pas normalisée en $-4/27$). Dans toute la suite, N est choisi suffisamment grand pour qu'une application f qui est soit un polynôme P_α , soit un élément de \mathcal{F}_α , admette une renormalisée $\mathcal{R}(f) \in \mathcal{F}_{-1/\alpha}$.

3. Plan de la démonstration des conjectures

Nous supposons dorénavant que θ est un irrationnel de type constant dont la fraction continue n'a que des coefficients plus grands que N et que les $t_n = p_n/q_n$ sont les réduites de θ . D'après ce qui précède, nous pouvons définir des suites de renormalisées $(f_j)_{j \geq 0}$ et $(f_{j,n})_{0 \leq j \leq n}$ par

$$f_0 := P_\theta, \quad f_{j+1} := s \circ \mathcal{R}(f_j) \circ s^{-1}, \quad f_{0,n} := P_{t_n} \quad \text{et} \quad f_{j+1,n} := s \circ \mathcal{R}(f_{j,n}) \circ s^{-1},$$

la conjugaison par $s : z \mapsto \bar{z}$ étant introduite pour que le nombre de rotation à l'origine reste entre 0 et $1/N$. L'application $f_{n,n}$ a son nombre de rotation égal à 0.

Commençons par démontrer la conjecture 1. La n -ième renormalisée $f_{n,n}$ du polynôme P_{t_n} appartient à \mathcal{F}_0 . Le cylindre d'Écalle répulsif de P_{t_n} s'identifie naturellement à celui de $f_{n,n}$. Les points de A_n correspondent à des points qui ne sont pas attirés par 0 sous itération de $f_{n,n}$. Or, pour tout $f \in \mathcal{F}_0$, l'ensemble des points dont l'orbite n'est pas attirée par 0 a une image de hauteur bornée dans le cylindre répulsif. Par compacité de \mathcal{F}_0 , il y a une borne uniforme ce qui montre la conjecture 1.

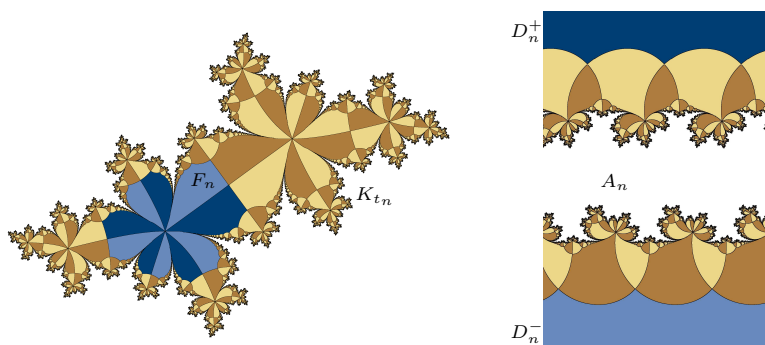


FIG. 5. Les ensembles K_{t_n} , F_n , A_n et D_n^\pm pour $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$ et $n = 4$.

Venons-en maintenant à la démonstration de la conjecture 2. On peut définir un échiquier parabolique dans l'intérieur de l'ensemble de Julia rempli K_{t_n} . Dans chaque composante du bassin immédiat, il y a deux cases qui adhèrent au point fixe 0. Il y a donc en tout $2q_n$ cases d'échiquier qui contiennent 0 dans leur bord. On appelle F_n la réunion de ces $2q_n$ cases. La projection de F_n dans le cylindre d'Écalle répulsif est la réunion de deux disques topologiques pointés D_n^+ et D_n^- , chacun voisinage d'un bout du cylindre. D'après la remarque 2, on peut également associer à $f_{n,n}$ deux cases d'échiquier parabolique. La projection de ces cases dans le cylindre d'Écalle répulsif s'identifie alors avec les mêmes D_n^+ et D_n^- .

Lemme 3.1 *Quel que soit le voisinage U du disque de Siegel fermé Δ_θ , $F_n \subset U$ pour n assez grand. Nous esquisserons la démonstration de ce lemme dans la section suivante.*



FIG. 6. Les ensembles F_4 , F_6 et F_9 avec le bord de Δ_θ pour $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Corollaire 3.2 *Pour tout $\varepsilon > 0$, si n est assez grand et si $w \in A_n$, il existe un disque D_w centré en w , disjoint de $D_n^+ \cup D_n^-$ et tel que $\text{Leb}(D_w \cap A_n)/\text{Leb}(D_w) \leq \varepsilon$.*

PREUVE. Soit $w \in A_n$, $U_n \subset \Delta_\theta$ un pétale répulsif pour P_{t_n} et $\Phi_n : U_n \rightarrow \mathbb{C}$ une coordonnée de Fatou répulsive. On pose $z := \Phi_n^{-1}(w)$ et $z_k := P_{t_n}^k(z)$. Soit $C = \sup |P'_\theta|$ sur Δ_θ . Alors $\forall \delta_0 > 0$, pour n assez grand, $\exists k$ tel que $\delta := d(z_k, \Delta_\theta) \in [\delta_0/2C, \delta_0]$. D'après le lemme 3.1, pour n assez grand, $B := D(z_k, \delta/2)$ évite F_n qui est invariant par P_{t_n} et contient l'ensemble postcritique de P_{t_n} . On peut donc tirer en arrière B le long de l'orbite, jusqu'à z et éventuellement au delà pour rentrer dans U_n , puis composer par Φ_n . On obtient une application univalente de B à valeurs dans le complémentaire de $D_n^+ \cup D_n^-$. D'après le théorème 2.1, si δ_0 est petit, la densité de K_θ dans B est élevée. D'après le théorème 2.2 et comme $K_{t_n} \rightarrow K_\theta$, il en est de même de la densité de K_{t_n} si n est assez grand. Le résultat suit du lemme de distortion de Koebe, quitte à prendre une boule plus petite. \square

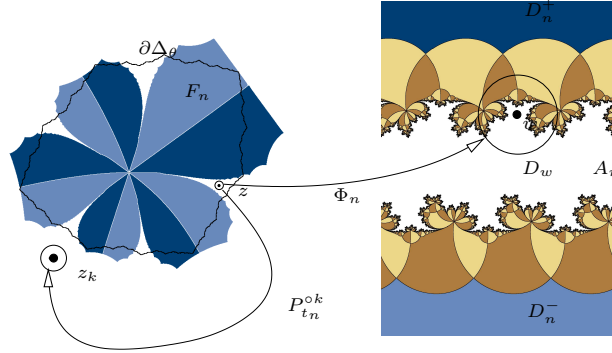


FIG. 7. Illustration de la construction d'un disque D_w centré en un point $w \in A_n$ et dans lequel la densité de A_n est petite.

PREUVE DE LA CONJECTURE 2. Rappelons que $f_{n,n} \in \mathcal{F}_0$. Par compacité, le complémentaire de $D_n^+ \cup D_n^-$ est donc de hauteur bornée indépendamment de n . On en déduit (en extrayant un recouvrement à l'aide d'un lemme à la Vitali) que l'aire de A_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. \square

4. Preuve du lemme 3.1

Pour tout $j \geq 0$ nous allons définir un ouvert U_j et pour tout $n \geq j$, nous allons construire des ouverts $U_{j,n}$ tels que

- $U_{j,n}$ contienne l'ensemble F_n quand $n \geq j + 1$ et
- $\overline{U_{j,n}}$ tende vers $\overline{U_j}$ au sens de Hausdorff quand $n \rightarrow \infty$.

Nous montrerons ensuite que pour tout $\varepsilon > 0$, si j est assez grand, U_j est contenu dans le ε -voisinage de $\overline{\Delta_\theta}$. Ceci complètera la démonstration du lemme 3.1.

Pour $0 \leq j \leq n$, posons

$$\phi_{j,n} := -\frac{4}{27}s \circ \exp \circ 2i\pi\Phi_{f_{j,n}}.$$

Si N est assez grand, on peut définir sur le pétale perturbé $\mathcal{P}_{f_{j,n}}$ une branche inverse $\psi_{j,n}$ de $\phi_{j-1,n}$ à valeurs dans $\mathcal{P}_{f_{j-1,n}}$ (il y a plusieurs choix possibles). L'application

$$\Psi_{j,n} := \psi_{1,n} \circ \psi_{2,n} \circ \dots \circ \psi_{j,n}$$

est alors une application univalente de $\mathcal{P}_{f_{j,n}}$ à valeurs dans le plan du polynôme P_{t_n} .

On définit $\mathcal{P}_{j,n}$ (resp. $\mathcal{P}'_{j,n}$) par $\operatorname{Re}(\Phi_{j,n}(z)) \in]0, a_{j+1} - k_1 - 1[$ (resp. $]1, a_{j+1} - k_1[$), où a_{j+1} est le $j + 1$ -ème coefficient du développement de θ en fraction continue. Alors, $f_{j,n} : \mathcal{P}_{j,n} \rightarrow \mathcal{P}'_{j,n}$ est un isomorphisme. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{j,n} &:= \Psi_{j,n}(\mathcal{P}_{j,n}), & \mathcal{Q}'_{j,n} &:= \Psi_{j,n}(\mathcal{P}'_{j,n}), & D_{j,n} &:= V_{f_{j,n}}^{-k_0} \cup W_{f_{j,n}}^{-k_0} \\ D'_{j,n} &:= f_{j,n}^{a_{j+1}}(D_{j,n}), & C_{j,n} &:= \Psi_{j,n}(D_{j,n}) & \text{et} & C'_{j,n} := \Psi_{j,n}(D'_{j,n}). \end{aligned}$$

Les contraintes imposées à k_0 font que $D_{j,n} \subset \mathcal{P}_{f_{j,n}}$ et $D'_{j,n} \subset \mathcal{P}'_{f_{j,n}}$.

Lemme 4.1 *L'application $\Psi_{j,n}$ conjugue $f_{j,n} : \mathcal{P}_{j,n} \rightarrow \mathcal{P}'_{j,n}$ à $P_{t_n}^{q_j} : \mathcal{Q}_{j,n} \rightarrow \mathcal{Q}'_{j,n}$ et elle conjugue $f_{j,n}^{a_{j+1}} : D_{j,n} \rightarrow D'_{j,n}$ à $P_{t_n}^{q_{j+1}} : C_{j,n} \rightarrow C'_{j,n}$.*

PREUVE. Cette propriété est vraie localement près de 0 où les applications sont voisines de rotations. Elle est donc vraie globalement par prolongement analytique. \square

Lemme 4.2 *Pour $n \geq j + 1$, l'ensemble F_n est contenu dans la réunion*

$$U_{j,n} := \bigcup_{k=0}^{q_{j+1} + \ell_{q_j}} P_{t_n}^k(C_{j,n})$$

où $\ell := k_0 - k_1 - 3$.

PREUVE. L'application $f_{n,n}$ appartient à \mathcal{F}_0 . D'après le théorème 2.3 et la remarque qui suit ce théorème, l'application $f_{n,n}$ possède deux cas d'échiquier parabolique. Notons F'_n l'adhérence de la réunion de ces deux cas. Le pétale perturbé $\mathcal{P}_{f_{n-1,n}}$ contient un ensemble F'_{n-1} qui s'envoie homéomorphiquement sur F'_n par $\phi_{n-1,n}$. On peut alors définir, pour $m \leq n - 1$, $F'_{m-1} := \psi_{m,n} \circ \psi_{m+1,n} \circ \dots \circ \psi_{n-1,n}(F'_{n-1})$. L'ensemble $F'_0 := \Psi_{n-1,n}(F'_{n-1})$ est la réunion de 2 cas adjacentes de l'ensemble F_n (parmi les $2q_n$ cas). Nous allons montrer que pour tout $k \geq q_{j+1} + \ell_{q_j}$, $P_{t_n}^k(F'_0) \subset U_{j,n}$. Comme $F_n = \bigcup_{k \geq q_{j+1} + \ell_{q_j}} P_{t_n}^k(F'_0)$, il s'ensuit que F_n est contenu dans $U_{j,n}$.

Pour ce faire, il suffit d'observer que

- (i) si $z \in D_{j,n}$, si $z' = \phi_{j,n}(z)$ et si $f_{j+1,n}(z')$ appartient au domaine de définition de $f_{j+1,n}$, alors il existe $b \in \mathbb{Z}$, $b \leq \ell$ tel que $(f_{j,n}|_{\mathcal{P}_{j,n}})^b \circ (f_{j,n}^{a_{j+1}}|_{D_{j,n}})(z) \in D_{j,n}$.
- (ii) les points de F'_n ont une orbite infinie par $f_{n,n}$ et donc, les points de F'_{j+1} ont une orbite infinie par $f_{j+1,n}$ qui reste dans le domaine de définition de $f_{j+1,n}$;

- (iii) il suit de (i) et (ii) que l'orbite par $f_{j,n}$ d'un point de F'_j rentre dans $D_{j,n}$ en au plus $a_{j+1} + \ell$ coups puis y repasse une infinité de fois, deux passages consécutifs étant distants d'au plus $a_{j+1} + \ell$ coups ;
- (iv) il suit de (iii) et du lemme 4.1 que l'orbite par P_{t_n} de tout point de F'_0 rentre dans $C_{j,n}$ en au plus $q_{j+1} + \ell q_j$ coups puis y repasse une infinité de fois, deux passages consécutifs étant distants d'au plus $q_{j+1} + \ell q_j$ coups.

Ce qui prouve le lemme 4.2. \square

Quand $n \rightarrow +\infty$, les polynômes P_{t_n} tendent vers P_θ , les applications $f_{j,n}$ tendent vers les applications f_j , les ensembles $C_{j,n}, D_{j,n}, \dots, U_{j,n}$ tendent vers des ensembles C_j, D_j, \dots, U_j définis de manière analogue. Il ne reste plus qu'à montrer que pour j assez grand, l'ouvert

$$U_j := \bigcup_{k=0}^{q_{j+1} + \ell q_j} P_\theta^k(C_j)$$

est contenu dans un petit voisinage de $\bar{\Delta}_\theta$.

Posons

$$D_j'' := f_j^{a_{j+1} + \ell}(D_j) \subset \mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}'_j \subset \mathcal{P}_{f_j} \quad \text{et} \quad C_j'' := \Psi_j(D_j'')$$

D'après le lemme 4.1, $C_j'' = P_\theta^{q_{j+1} + \ell q_j}(D_j)$. Commençons par montrer que C_j'' est contenu dans un petit voisinage de $\bar{\Delta}_\theta$ pour j grand. Les points de D_j'' images par Ψ_j de points contenus dans le disque de Siegel Δ_{f_j} de f_j sont dans le disque de Siegel Δ_θ de P_θ . Ils ne posent donc pas de problème. Les Δ_{f_j} contiennent un disque $D(0, r)$ de rayon indépendant de j (car θ est de type borné), donc il existe un anneau contenu dans \mathcal{P}_{f_j} qui a un module minoré indépendamment de j et qui isole les points de $D_j'' \setminus \Delta_{f_j}$. L'application Ψ_j est univalente sur \mathcal{P}_{f_j} . On peut appliquer le lemme de distortion de Koebe pour conclure que $C_j'' \setminus \Delta_\theta$ est de diamètre comparable à la distance entre deux points du bord de Δ_θ contenus dans C_j'' et qui s'envoient l'un sur l'autre par $P_\theta^{q_j}$.

Les points de $U_j \setminus \Delta_\theta$ sont des préimages des points de $C_j'' \setminus \Delta_\theta$ par des branches inverses de P_θ^k , $k \leq q_{j+1} + \ell q_j$. Or, le nombre de valeurs critiques de $P_\theta^{q_{j+1} + \ell q_j}$ dans $\Psi_j(\mathcal{P}_{f_j})$ est égal au nombre de valeurs critiques de $f_j^{a_{j+1} + \ell}$ dans \mathcal{P}_{f_j} . Ce nombre est majoré par a_{j+1} et comme θ est de type constant, il est majoré indépendamment de j . Une variante du lemme de distortion de Koebe pour les revêtements ramifiés permet de conclure que les points de $U_j \setminus \Delta_\theta$ sont à une distance de Δ_θ inférieure à

$$M \cdot \sup_{z \in \partial \Delta_\theta} d(z, P_\theta^{q_j}(z))$$

où M est une constante qui ne dépend pas de j . La démonstration du lemme 3.1 est complétée puisque ce supremum tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$.

Références

- [C] A. CHÉRITAT, *Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive*, Thèse, Orsay (2001).
- [D] A. DOUADY, *Does a Julia set depend continuously on the polynomial?*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **49** (1994), 91-135.
- [McM] C.T. McMULLEN, *Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets*, Acta Math., **180** (1998), 247-292.
- [S] M. SHISHIKURA, *Parabolic renormalization, a preliminary note*, manuscrit.