

---

**Géométrie**

---

1. ESPACES AFFINES

1.1. **Introduction.** Dans cette partie,  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (de dimension finie).

**Définition 1** (Espace affine). Un espace affine  $\mathcal{E}$  de direction  $E$  est un ensemble non vide muni d'une application  $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \ni (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB} \in E$  telle que :

(1) pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $B \in \mathcal{E}$  et  $C \in \mathcal{E}$ , on a la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} ;$$

(2) pour tout  $A \in \mathcal{E}$  et tout  $\vec{v} \in E$ , il existe un unique point  $B \in \mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ .

Dans la définition précédente, l'unique point  $B \in \mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$  est appelé *translaté* de  $A$  par  $\vec{v}$ ; il est noté  $B = A + \vec{v}$ .

L'unicité dans la définition précédente conduit à l'implication

$$(1) \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \implies B = C.$$

On dit que l'espace affine  $\mathcal{E}$  est dirigé par l'espace vectoriel  $E$ . La dimension de l'espace affine  $\mathcal{E}$  est

$$\dim(\mathcal{E}) = \dim(E).$$

**Définition 2.** Une droite affine est un espace affine de dimension 1. Un plan affine est un espace affine de dimension 2.

**Proposition 1.** Pour tout  $A \in \mathcal{E}$  et tous  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ , on a :

$$A + (\vec{u} + \vec{v}) = (A + \vec{u}) + \vec{v}.$$

*Démonstration.* Notons  $B = A + \vec{u}$ ,  $C = B + \vec{v}$  et  $C' = A + (\vec{u} + \vec{v})$ . D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AC'} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

D'après (1), on a  $C' = C$ . □

**Proposition 2.** Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{E}$ . On a  $A = B$  si et seulement si  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

*Démonstration.* D'une part, d'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = 2\overrightarrow{AA}.$$

Par conséquent,  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .

D'autre part, d'après (1), si  $\overrightarrow{AB} = \vec{0} = \overrightarrow{AA}$ , alors  $B = A$ . □

**Proposition 3.** Pour tous  $A, B \in \mathcal{E}$ ,  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ .

*Démonstration.* D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}. \quad \square$$

### Exemples

- (1) L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) ; x, y, z \in \mathbb{R}\}$  peut être muni d'une structure d'espace affine via l'application  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Il est alors dirigé par  $\mathbb{R}^3$  lui-même.

- (2) Plus généralement, tout espace vectoriel  $E$  peut être muni d'une structure d'espace affine dirigé par  $E$  via l'application  $E \times E \rightarrow E$  définie par  $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{v} - \vec{u}$ .
- (3) Soit  $\lambda$  un réel et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. L'espace des solutions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  d'une équation différentielle linéaire  $f'(t) - \lambda f(t) = g(t)$  est un espace affine.

**Exercice 1.** Montrer que pour ces trois exemples, les deux propriétés de la définition d'espace affine sont vérifiées.

Remarque 1 : un espace affine peut être considéré comme *un espace vectoriel dans lequel on aurait oublié où se trouve l'origine*.

Remarque 2 : Un espace affine permet d'encoder des positions, tandis qu'un espace vectoriel permet d'encoder des déplacements.

**1.2. Repères cartésiens.** Si on fixe un point  $O$  comme *origine* d'un espace affine  $\mathcal{E}$ , on peut considérer l'application  $M \mapsto \overrightarrow{OM}$  de  $\mathcal{E}$  dans  $E$ . Cette application est une bijection, ce qui nous permet de munir  $\mathcal{E}$  d'une structure d'espace vectoriel. L'espace vectoriel ainsi défini est noté  $E_O$  et appelé *vectorialisation de l'espace affine  $\mathcal{E}$  en  $O$* .

Beaucoup de problèmes de géométrie affine peuvent se résoudre en choisissant une origine  $O$  convenable puis en utilisant des résultats de géométrie dans les espaces vectoriels.

**Définition 3.** Un repère cartésien dans un espace affine  $\mathcal{E}$  est la donnée d'une origine  $O \in \mathcal{E}$  et d'une base  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $E$  de sorte que pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

On dit que  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées cartésiennes de  $M$  dans le repère  $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ .

Si  $\mathcal{E}$  est un espace affine de dimension  $n$  et qu'on se donne un repère cartésien, l'application qui à un point  $A \in \mathcal{E}$  associe ses coordonnées cartésiennes  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  dans le repère cartésien correspondant est un isomorphisme (affine) entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathbb{R}^n$ . Donc, tout comme un espace vectoriel (de dimension finie  $n$ ) s'identifie à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  une fois une base choisie, un espace affine (de dimension finie  $n$ ) s'identifie à l'espace affine  $\mathbb{R}^n$  une fois un repère choisi.

Nous allons maintenant étudier l'effet d'un changement de repère sur les coordonnées.

Soit  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$  et  $\mathcal{R}' = (O'; \mathcal{B}')$  deux repères cartésiens. Soit  $M \in \mathcal{E}$  un point. On note  $X$  le vecteur colonne formé des coordonnées cartésiennes de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  et  $X'$  le vecteur colonne formé des coordonnées cartésiennes de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}'$ . Notons pour finir  $Y$  le vecteur colonne formé des coordonnées cartésiennes de  $O'$  dans le repère  $\mathcal{R}$ . Alors,

$$X = Y + PX' \quad \text{où} \quad P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , c'est-à-dire la matrice dont la  $j$ -ème colonne est formée des coordonnées cartésienne du  $j$ -ème vecteur de la base  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Cela découle de la formule du changement de base dans un espace vectoriel et de l'égalité

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}.$$

**1.3. Sous-espaces affines.** Il s'agit de modéliser, par exemple, la notion de plan ou de droite ne passant pas nécessairement par l'origine. On va par exemple considérer les ensembles

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) ; x + y + z = 1\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{ou} \quad \mathcal{D} = \{(x, y) ; 2x - y = 3\} \subset \mathbb{R}^2.$$

**Définition 4** (Sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ ). Un sous-ensemble  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  est un sous-espace affine s'il existe

- un point  $A \in \mathcal{E}'$  et
- un sous-espace vectoriel  $E' \subseteq E$

tels que

$$\mathcal{E}' = \{A + \vec{v} ; \vec{v} \in E'\}.$$

Autrement dit,  $E' := \{\overrightarrow{AM} ; M \in \mathcal{E}'\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Notons que  $E'$  est l'espace vectoriel dirigeant  $\mathcal{E}'$  et la dimension de  $\mathcal{E}'$  est égale à la dimension de  $E'$ .

**Exemples.**

- $\{A\}$  : direction  $\{\vec{0}\}$ .
- $\mathcal{P} := \{(x, y, z) ; x + y + z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ . Le point  $A(0, 0, 1)$  appartient à  $\mathcal{P}$ . Soit  $\vec{v}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  de coordonnées  $(v_1, v_2, v_3)$ . Alors  $A + \vec{v} \in \mathcal{P}$  si et seulement si  $(0, 0, 1) + (v_1, v_2, v_3)$  vérifie l'équation  $x + y + z =$

1. Cela est le cas si et seulement si  $v_1 + v_2 + (1 + v - 3) = 1$ , c'est-à-dire si et seulement si  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\vec{v}$  appartient au plan vectoriel

$$P = \{(x, y, z) ; x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- $\mathcal{D} := \{(0, -3) + \lambda(1, 2) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^2$ .
- Deux points distincts  $A, B \in \mathcal{E}$  définissent un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  de dimension 1 passant par  $A$  et  $B$  : c'est la droite affine passant par  $A$  de direction  $\text{Vect}(\overrightarrow{AB})$ .
- Trois points distincts non alignés  $A, B, C \in \mathcal{E}$  définissent un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  de dimension 2 contenant  $A, B$  et  $C$  : le plan affine passant par  $A$  de direction  $\text{Vect}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ .

### 1.3.1. Notion de parallélisme.

**Définition 5.** Soient  $\mathcal{E}'_1 \subseteq \mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'_2 \subseteq \mathcal{E}$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  dirigés respectivement par  $E'_1 \subseteq E$  et  $E'_2 \subseteq E$ .

- On dit que  $\mathcal{E}'_1$  et  $\mathcal{E}'_2$  sont *parallèles* s'ils sont dirigés par le même sous-espace vectoriel :  $E'_1 = E'_2$ .
- On dit que  $\mathcal{E}'_1$  est faiblement parallèle à  $\mathcal{E}'_2$  si  $E'_1 \subseteq E'_2$

Avec cette définition, il n'existe qu'une seule droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée. Si  $A$  est un point de  $E$  et  $\mathcal{D}$  est une droite affine dirigée par  $D$ , alors la droite recherchée est  $A + D$ .

Remarque : deux sous-espaces affines parallèles sont donc soit confondus, soit d'intersection vide.

### 1.3.2. Intersection de sous-espaces affines.

**Proposition 4.** Soit  $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  avec  $\mathcal{E}_i$  dirigé par  $E_i$ . Posons  $\mathcal{E}' := \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$  et  $E' := \bigcap_{i \in I} E_i$ . Alors,

- soit  $\mathcal{E}' = \emptyset$ ,
- soit  $\mathcal{E}'$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $E'$ .

*Démonstration.* Si  $\mathcal{E}' = \emptyset$ , il n'y a rien à démontrer.

Si  $\mathcal{E}' \neq \emptyset$ , on peut choisir un point  $A \in \mathcal{E}'$ , c'est-à-dire  $A \in \mathcal{E}_i$  pour tout  $i \in I$ . Alors,  $B \in \mathcal{E}'$  si et seulement si  $B \in \mathcal{E}_i$  pour tout  $i \in I$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\overrightarrow{AB} \in E_i$  pour tout  $i \in I$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\overrightarrow{AB} \in E'$ . On a donc  $\mathcal{E}' = \{A + \vec{v} ; \vec{v} \in E'\}$ . Autrement dit,  $\mathcal{E}'$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $E'$ .  $\square$

**Définition 6.** Soit  $X \subseteq \mathcal{E}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{E}$ . Le sous-espace affine  $\text{Aff}(X)$  engendré par  $X$  est l'intersection de tous les sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  contenant  $X$ .

Autrement dit :

$$\text{Aff}(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{E}' \text{ sous-espace affine de } \mathcal{E} \\ \mathcal{E}' \supset X}} \mathcal{E}'.$$

**Exemples.**

- Si  $X = \{x_0\}$ , alors  $\text{Aff}(X) = \{x_0\}$ .
- Si  $X = \{x_0, x_1\}$  avec  $x_0 \neq x_1$ , alors  $\text{Aff}(X)$  est la droite contenant  $x_0$  et  $x_1$ .
- Si  $X = \{x_0, x_1, x_2\}$  avec  $x_0, x_1$  et  $x_2$  trois points distincts, alors
  - soit  $\text{Aff}(X)$  est une droite (de dimension 1) et on dit que les points sont alignés,
  - soit  $\text{Aff}(X)$  est un plan (de dimension 2).

**Lemme 1.** Étant donnés  $k + 1$  points  $(A_0, \dots, A_k) \in \mathcal{E}$ ,

$$\text{Aff}(A_0, \dots, A_k) = A_0 + \text{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}).$$

*Démonstration.* Considérons l'espace affine  $\mathcal{F} := A_0 + \text{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$ . Observons d'abord que les points  $A_i$  sont tous contenus dans  $\mathcal{F}$  et donc  $\text{Aff}(A_0, \dots, A_k) \subseteq \mathcal{F}$ . Supposons maintenant que  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  est un espace affine contenant  $X := \{A_0, \dots, A_k\}$ . Alors  $\mathcal{E}'$  contient  $A_0 + \text{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}) = \mathcal{F}$ . Donc  $\mathcal{F}$  est contenu dans l'intersection de tous les espaces affines contenant  $X$ , c'est-à-dire dans  $\text{Aff}(X)$ .  $\square$

**Rappel.** La réunion de deux sous-espaces vectoriels  $E_1 \subseteq E$  et  $E_2 \subseteq E$  n'est en général pas un sous-espace vectoriel. La somme

$$E_1 + E_2 := \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ avec } (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E_1 \times E_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ . La dimension de  $E_1 + E_2$  est

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

**Proposition 5.** Soient  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  dirigés respectivement par  $E_1$  et  $E_2$ . Posons  $\mathcal{E}' := \text{Aff}(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ .

- Si  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset$ , alors  $\mathcal{E}'$  est dirigé par  $E_1 + E_2$  et
 
$$\dim(\mathcal{E}') = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$
- Si  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$ , alors  $\mathcal{E}'$  est dirigé par  $\text{Vect}(\overrightarrow{A_1A_2}) + E_1 + E_2$  avec  $A_1 \in \mathcal{E}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{E}_2$  et
 
$$\dim(\mathcal{E}') = 1 + \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

*Démonstration.* Posons  $X = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ . Supposons que  $A_1 \in \mathcal{E}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{E}_2$ . Considérons le sous-espace vectoriel  $F \subseteq E$  et le sous-espace affine  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  dirigé par  $F$  avec

$$F := \text{Vect}(\overrightarrow{A_1A_2}) + E_1 + E_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{F} := A_1 + F.$$

On va montrer que  $\text{Aff}(X) = \mathcal{F}$ .

D'une part, si  $M \in X$ , alors

- soit  $M \in \mathcal{E}_1$  et  $\overrightarrow{A_1 M} \in E_1$  car  $A_1 \in \mathcal{E}_1$ ,
- soit  $M \in \mathcal{E}_2$  et  $\overrightarrow{A_1 M} = \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 M} \in \text{Vect}(\overrightarrow{A_1 A_2}) + E_2$  car  $A_2 \in \mathcal{E}_2$ .

Dans les deux cas, on a  $\overrightarrow{A_1 M} \in F$  et donc  $M \in \mathcal{F}$ . Cela montre que  $X \subseteq \mathcal{F}$  et donc

$$(2) \quad \text{Aff}(X) \subseteq \mathcal{F}.$$

Réciproquement, soit  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  un sous-espace affine contenant  $X$  et soit  $E' \subseteq E$  l'espace vectoriel qui dirige  $\mathcal{E}'$ . Comme  $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}'$ , on a  $E_1 \subseteq E'$ . De même,  $E_2 \subseteq E'$ . Enfin,  $A_1 \in \mathcal{E}'$  et  $A_2 \in \mathcal{E}'$ , donc  $\text{Vect}(\overrightarrow{A_1 A_2}) \in \mathcal{E}'$ . Cela montre que  $F \subseteq E'$  et donc que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}'$ . Par conséquent, tout sous-espace affine  $\mathcal{E}'$  contenant  $X$  contient  $\mathcal{F}$ . Donc

$$(3) \quad \mathcal{F} \subseteq \text{Aff}(X).$$

D'après les inclusions (2) et (3), on a

$$\text{Aff}(X) = \mathcal{F} = A_1 + \text{Vect}(\overrightarrow{A_1 A_2}) + E_1 + E_2.$$

Notons que si  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset$ , on peut prendre  $A_1 = A_2 = A \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  et dans ce cas, on a

$$\text{Aff}(X) = A + E_1 + E_2.$$

En particulier,  $\mathcal{F}$  est dirigé par  $E_1 + E_2$ .

En ce qui concerne les dimensions, on a donc

$$\dim(\text{Aff}(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)) = \dim(\text{Vect}(\overrightarrow{A_1 A_2}) + E_1 + E_2).$$

Si  $A_1 = A_2 = A \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ , alors

$$\dim(\text{Vect}(\overrightarrow{A_1 A_2}) + E_1 + E_2) = \dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Si  $A_1 \in \mathcal{E}_1$ ,  $A_2 \in \mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$ , en particulier  $\overrightarrow{A_1 A_2} \neq \vec{0}$ , alors

$$\begin{aligned} \dim(\text{Vect}(\overrightarrow{A_1 A_2}) + E_1 + E_2) &= 1 - \dim(\text{Vect}(\overrightarrow{A_1 A_2}) \cap (E_1 + E_2)) + \dim(E_1 + E_2) \\ &= 1 + \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2). \end{aligned}$$

En effet,  $\overrightarrow{A_1 A_2} \notin E_1 + E_2$  car sinon, on aurait  $\overrightarrow{A_1 A_2} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  avec  $\vec{v}_1 \in E_1$  et  $\vec{v}_2 \in E_2$  et

$$\mathcal{E}_2 \ni A_2 - \vec{v}_2 = A_1 + \overrightarrow{A_1 A_2} - \vec{v}_2 = A_1 + \vec{v}_1 \in E_1;$$

ce qui contredirait  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$ . □

1.3.3. *Espaces supplémentaires.* Rappelons que  $E$  est la somme directe de deux sous-espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$ , que l'on note  $E = E_1 \oplus E_2$ , si

$$E = E_1 + E_2 \quad \text{et} \quad E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}.$$

Dans ce cas, on dit que  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires dans  $E$ . On a

$$E = E_1 \oplus E_2 \iff E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \quad \text{et} \quad \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2).$$

Rappelons également que  $E = E_1 \oplus E_2$  si et seulement si  $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$  et  $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ , si et seulement si  $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$  et  $E = E_1 + E_2$ .

**Définition 7.** Deux sous-espaces affines  $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}$  dirigés par  $E_1$  et  $E_2$  sont *supplémentaires* si  $E = E_1 \oplus E_2$ .

**Proposition 6.** Deux sous-espaces affines  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}$  sont supplémentaires si et seulement si  $\text{Aff}(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = \mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  contient un unique point.

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{A\}$  et  $\text{Aff}(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = \mathcal{E}$ . Alors  $\text{Aff}(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = \mathcal{E}$  est dirigé par  $E_1 + E_2 = E$ . Si  $\vec{v} \in E_1 \cap E_2$ , alors  $A + \vec{v} \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ , donc  $A + \vec{v} = A$ , donc  $\vec{v} = \vec{0}$ . Par conséquent,  $E = E_1 \oplus E_2$ . Supposons maintenant que  $E = E_1 \oplus E_2$ . Alors,  $\text{Aff}(\mathcal{E}'_1 \cup \mathcal{E}'_2)$  est dirigé par  $E$ , donc  $\text{Aff}(\mathcal{E}'_1 \cup \mathcal{E}'_2) = \mathcal{E}$ . Supposons que  $A_1 \in \mathcal{E}'_1$  et  $A_2 \in \mathcal{E}'_2$ . Comme  $E = E_1 \oplus E_2$ , on a  $\overrightarrow{A_1 A_2} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  avec  $\vec{v}_1 \in E_1$  et  $\vec{v}_2 \in E_2$ . Alors

$$\mathcal{E}_1 \ni A_1 + \vec{v}_1 = A_1 + \overrightarrow{A_1 A_2} - \vec{v}_2 = A_2 - \vec{v}_2 \in \mathcal{E}_2.$$

Donc  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  est non vide. Si  $A_1, A_2 \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ , alors  $\overrightarrow{A_1 A_2} \in E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ , donc  $A_1 = A_2$ . Par conséquent,  $\mathcal{E}'_1 \cap \mathcal{E}'_2$  contient un unique point.  $\square$

1.3.4. *Représentations de sous-espaces.* Exemple de représentation paramétrique d'une droite dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ -1 + 2\lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple de représentation paramétrique d'un plan dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 + 2\mu \\ 2 + \lambda + 3\mu \end{pmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

On peut également définir un plan de  $\mathbb{R}^3$  en donnant une équation cartésienne de ce plan :

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; 2x + 3y + z = -2 \right\}.$$

On peut définir une droite de  $\mathbb{R}^3$  par un système d'équations cartésiennes. Cela revient à définir une droite comme intersection de deux plans.

Exemple d'équation cartésienne d'une droite de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; 2x + 3y + z = -2 \text{ et } x + y + z = -1 \right\}.$$

Pour que ce système d'équations définisse une droite, il faut et il suffit que les plans ne soient pas parallèles.

Pour passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne, voir la première feuille de TD.

## 2. APPLICATIONS AFFINES

Dans toute cette partie,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont deux espaces affines dirigés respectivement par  $E$  et  $F$ , et  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est une application.

Prérequis : notion d'applications linéaires.

### 2.1. Définition et exemples.

**Définition 8.** Une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est une application affine s'il existe une application linéaire  $\vec{f} : E \rightarrow F$  telle que

$$(4) \quad \forall A, B \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}).$$

L'application linéaire  $\vec{f}$  est appelée la partie linéaire de  $f$ .

Si  $O \in \mathcal{E}$  est une origine, l'équation (4) devient

$$(5) \quad \forall M \in \mathcal{E} \quad f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM}).$$

**Exercice 2.** Vérifier que les propriétés (4) et (5) sont équivalentes.

**Exemples.**

- Supposons que  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  soit une application affine et prenons  $O = (0, 0, 0)$ . Alors

$$f(O) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

De plus  $\vec{f} \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  est de la forme

$$\vec{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- Par exemple, si

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$



alors

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 + x_3 \\ -1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

— L'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

est une application affine.

Comme pour les applications linéaires qui s'écrivent à l'aide de matrices une fois des bases fixées, une application affine s'écrit comme dans les exemples ci-dessus, une fois fixés des repères cartésiens.

Supposons que  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  soit une application affine, avec  $\dim(E) = m$  et  $\dim(F) = n$ , que  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$  est un repère cartésien de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$  est un repère cartésien de  $\mathcal{F}$ , avec  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ . On note

- $A := \text{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \vec{f}$  la matrice de  $\vec{f}$  dans les bases  $\mathcal{B}$  (au départ) et  $\mathcal{B}'$  (à l'arrivée), c'est-à-dire la matrice dont la  $j$ -ème colonnes est formée des coordonnées de  $\vec{f}(e'_j)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- $(x_1, \dots, x_m)$  les coordonnées de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$ ,
- $(b_1, \dots, b_n)$  les coordonnées de  $f(O)$  dans le repère  $\mathcal{R}'$ .

Alors  $f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$  et donc

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**2.2. Exemples d'applications affines.** L'étude d'une application affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  d'un espace affine dans lui-même passe par l'étude de l'ensemble  $\text{Fix}(f)$  des points fixes de  $f$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $M$  tels que  $f(M) = M$  :

$$\text{Fix}(f) = \{M \in \mathcal{E} ; f(M) = M\}.$$

Remarque : pour parler de point fixe, il faut que l'ensemble de départ coïncide avec l'ensemble d'arrivée.

**Proposition 7.** Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application affine. Alors,

- soit  $\text{Fix}(f) = \emptyset$ ,
- soit  $\text{Fix}(f)$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{id}_E)$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$ . Choisissons un point  $A \in \text{Fix}(f)$ . Alors, pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , on a

$$\overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}).$$

Donc,  $M \in \text{Fix}(f)$  si et seulement si  $\overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{AM}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\overrightarrow{AM} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{id}_E)$ .  
On a donc

$$\text{Fix}(f) = A + \text{Ker}(\vec{f} - \text{id}_E). \quad \square$$

### 2.2.1. Translation.

**Définition 9.** La translation  $T_{\vec{v}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  de vecteur  $\vec{v} \in E$  est l'application affine définie par

$$T_{\vec{v}}(M) = M + \vec{v}.$$

Sa partie linéaire est l'application identité  $\text{id}_E : E \rightarrow E$ .

Remarque : l'application  $T_{\vec{v}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  n'admet pas de point fixe, sauf dans le cas où  $\vec{v} = \vec{0}$  auquel cas  $f = \text{id}_{\mathcal{E}}$  et tous les points sont fixes.  
Notons que si  $O \in \mathcal{E}$  est une origine, alors le quadrilatère  $(O, f(O), f(M), M)$  est un parallélogramme.

### 2.2.2. Homothétie.

**Définition 10.** Si  $A \in \mathcal{E}$  et  $k$  est un réel non nul, l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $k$  est l'application  $H_{A,k}$  définie par

$$H_{A,k}(M) = A + k\overrightarrow{AM}.$$

Sa partie linéaire est l'homothétie vectorielle  $k \cdot \text{id}_E : E \rightarrow E$ .

**Exercice 3.** Montrer que :

- si  $k = 1$ , l'homothétie  $H_{A,1}$  est l'identité de  $\mathcal{E}$  et tous les points de  $\mathcal{E}$  sont des points fixes ;
- si  $k \neq 1$ , l'homothétie  $H_{A,k}$  admet  $A$  pour unique point fixe.

2.2.3. *Symétrie centrale.* Une homothétie de rapport  $-1$  est appelée une symétrie centrale.

**Définition 11.** La symétrie centrale par rapport à un point  $A \in \mathcal{E}$  est l'application affine  $S_A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  définie par

$$S_A(M) = A - \overrightarrow{AM}.$$

Sa partie linéaire est  $-\text{id}_E : E \rightarrow E$ .

**Exercice 4.** Montrer que  $A$  est l'unique point fixe de la symétrie centrale par rapport à  $A$ .

2.2.4. *Projection affine.* Rappelons que si  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  et  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$  sont deux sous-espaces affines supplémentaires (c'est-à-dire dirigés par des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ ), alors  $\mathcal{F} \cap \mathcal{D}$  contient un unique point.

**Définition 12.** Soit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  un sous espace affine dirigé par  $F \subseteq E$  et soit  $D \subseteq E$  un sous-espace vectoriel tels que  $F \oplus D = E$ . La projection (affine ou oblique) sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à la direction  $D$  est l'application affine  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  définie par

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{D}_M = \{p(M)\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_M = M + D.$$

Sa partie linéaire est la projection vectorielle sur  $F$  parallèlement à  $D$ .

**Exercice 5.** Montrer que l'ensemble des points fixes de la projection sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $D$  est  $\text{Fix}(f) = \mathcal{F}$ .

Rappelons que  $\vec{p} : E \rightarrow E$  est une projection vectorielle si et seulement si  $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ . Nous allons maintenant voir qu'il en est de même de la projection affine.

**Lemme 2.** Si  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une projection affine, alors  $p \circ p = p$ .

*Démonstration.* Supposons que  $p$  soit la projection sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $D$ . Étant donné un point  $M \in \mathcal{E}$ , posons  $\mathcal{D}_M = M + D$ . Par définition,  $M' = p(M)$  est l'unique point d'intersection de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{D}_M$ . Par conséquent  $M' \in \mathcal{F}$  et  $\vec{f} \cap \mathcal{D}_{M'} = \{M'\}$ . On a donc

$$M' = p(M) \quad \text{et} \quad p \circ p(M) = p(M') = M' = p(M).$$

Donc  $p \circ p = p$ . □

**Proposition 8.** Une application affine  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une projection affine si et seulement si  $p \circ p = p$ .

*Démonstration.* On vient de voir que si  $p$  est une projection affine, alors  $p \circ p = p$ . Il suffit donc de montrer la réciproque. Supposons donc que  $p \circ p = p$ . Notons  $\vec{p} : E \rightarrow E$  la partie linéaire de  $p$ . Alors pour tous points  $A, B \in \mathcal{E}$ ,

$$\vec{p} \circ \vec{p}(\overrightarrow{AB}) = \vec{p}(\overrightarrow{p(A)p(B)}) = \overrightarrow{p \circ p(A)p \circ p(B)} = \overrightarrow{p(A)p(B)} = \vec{p}(\overrightarrow{AB}).$$

L'application  $\vec{p} : E \rightarrow E$  est donc une projection vectorielle. Notons  $F$  son image et  $D$  son noyau. Alors  $E = F \oplus D$  et  $\vec{p}$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $D$ . Soit  $A$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $A' = p(A)$ . Alors  $p(A') = p \circ p(A) = p(A) = A'$ . Nous allons montrer que  $p$  est la projection affine sur  $\mathcal{F} = A' + F$  parallèlement à  $D$ . Soit  $M \in \mathcal{E}$  et posons  $M' = p(M)$ . Alors d'une part

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{p(A)p(M)} = \vec{p}(\overrightarrow{AM}) \in F \quad \text{et donc} \quad M' \in \mathcal{F}.$$

D'autre part,  $p(M') = p \circ p(M) = p(M) = M'$ , doù

$$\vec{p}(\overrightarrow{MM'}) = \overrightarrow{p(M)p(M')} = \overrightarrow{M'M'} = \vec{0} \quad \text{et donc} \quad M' \in \mathcal{D}_M = M + D.$$

Cela montre que  $\mathcal{F} \cap \mathcal{D}_M = \{M'\}$ . □

**Exercice 6.** Déterminer dans le repère cartésien standard de  $\mathbb{R}^3$  l'expression de la projection sur le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + y + z = 1$  parallèlement à la droite  $D = \text{Vect}((1, 0, 1))$ .

Solution. Le plan  $P$  qui dirige  $\mathcal{P}$  est le plan vectoriel  $P$  d'équation  $x + y + z = 0$ . Le vecteur  $(1, 0, 1)$  n'est pas contenu dans  $P$ . Donc  $P \cap D = \{0\}$ . Comme la dimension de  $P$  est 2 et que celle de  $D$  est 1, on a donc  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ . La projection  $p$  sur  $\mathcal{P}$  parallèlement à  $D$  est donc bien définie.

Si  $M \in \mathbb{R}^3$  est le point de coordonnées  $(x, y, z)$  et si  $M' = p(M)$  a pour coordonnées  $(x', y', z')$ , alors  $M' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{D}_M$ , c'est-à-dire que

$$x' + y' + z' = 1 \quad \text{et} \quad M' = M + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$\begin{cases} x' + y' + z' = 1 \\ x' = x + \lambda \\ y' = y \\ z' = z + \lambda \end{cases}.$$

On a donc

$$(x + \lambda) + y + (z + \lambda) = 1 \quad \implies \quad \lambda = \frac{1 - x - y - z}{2}.$$

D'où

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1 - x - y - z}{2} \\ y \\ z + \frac{1 - x - y - z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + x - y - z}{2} \\ y \\ \frac{1 - x - y + z}{2} \end{pmatrix}.$$

### 2.2.5. Symétrie affine.

**Définition 13.** Soit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  un sous espace affine dirigé par  $F \subseteq E$  et soit  $D \subseteq E$  un sous-espace vectoriel tels que  $F \oplus D = E$ . La symétrie (affine ou oblique) par rapport à  $\mathcal{F}$  parallèlement à la direction  $D$  est l'application affine  $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  telle que pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , le point  $s(M)$  est l'unique point de  $\mathcal{D}_M = M + D$  tel que le milieu de  $[Ms(M)]$  appartienne à  $\mathcal{F}$ . Sa partie linéaire est la symétrie vectorielle par rapport à  $F$  parallèlement à  $D$ .

**Exercice 7.** Montrer que l'ensemble des points fixes d'une symétrie par rapport à  $\mathcal{F}$  est  $\text{Fix}(f) = \mathcal{F}$ .

Notons que

$$s \circ s = \text{id}_{\mathcal{E}}.$$

De plus, pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , le milieu de  $[Ms(M)]$  appartient à  $\mathcal{F} \cap \mathcal{D}_M$ . Donc, si  $p$  est la projection affine sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $D$ , alors le milieu

de  $[Ms(M)]$  est donc égal à  $p(M)$ . On a donc

$$\overrightarrow{Ms(M)} = \overrightarrow{2Mp(M)} \quad \text{et donc} \quad s(M) = M + \overrightarrow{2Mp(M)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \vec{s}(\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{s(A)s(B)} = \overrightarrow{s(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bs(B)} \\ &= \overrightarrow{2p(A)A} + \overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{2Bp(B)} - \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{2p(A)p(B)} - \overrightarrow{AB} \\ &= 2\vec{p}(\overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} = (2\vec{p} - \text{id}_E)(\overrightarrow{AB}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\vec{s} = 2\vec{p} - \text{id}_E.$$

**Proposition 9.** Une application affine  $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une symétrie si et seulement si  $s \circ s = \text{id}_E$ .

**Exercice 8.** Le démontrer.

### 2.3. Propriétés des applications affines.

**Lemme 3.** Soient  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  et  $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  deux applications affines. Alors  $g \circ f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$  est une application affine et  $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ .

*Démonstration.* On a

$$\overrightarrow{g \circ f(A)g \circ f(B)} = \vec{g}(\overrightarrow{f(A)f(B)}) = \vec{g} \circ \vec{f}(\overrightarrow{AB}). \quad \square$$

**Lemme 4.** Si  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est une application affine et  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  est un sous-espace affine dirigé par  $E' \subseteq E$ , alors  $f(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{F}$  est un sous-espace affine dirigé par  $\vec{f}(E')$ .

*Démonstration.* Soit  $A$  un point de  $\mathcal{E}'$ . Alors  $\mathcal{E}' = A + E'$ . D'une part, l'ensemble  $f(\mathcal{E}')$  contient donc  $f(A)$ , ce qui montre que  $f(\mathcal{E}') \neq \emptyset$ . D'autre part, si  $N \in f(\mathcal{E}')$ , alors il existe un point  $M \in \mathcal{E}'$  tel que  $f(M) = N$ . On a alors

$$N = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(M)} = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \in f(A) + \vec{f}(E').$$

Cela montre que

$$f(\mathcal{E}') \subseteq f(A) + \vec{f}(E').$$

Enfin, si  $N \in f(A) + \vec{f}(E')$ , c'est-à-dire si  $N = f(A) + \vec{f}(\vec{v})$  avec  $\vec{v} \in E'$ , alors le point  $B = A + \vec{v}$  appartient à  $\mathcal{E}' = A + E'$  et donc

$$N = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(B)} = f(B) \in f(\mathcal{E}').$$

Cela montre que

$$f(A) + \vec{f}(E') \subseteq f(\mathcal{E}').$$

On a donc  $f(\mathcal{E}') = f(A) + \vec{f}(E')$ , ce qui démontre le lemme.  $\square$

**Corollaire 1.** L'application affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est bijective si et seulement si la partie linéaire  $\vec{f} : E \rightarrow F$  est bijective. Dans ce cas, l'inverse  $f^{-1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$  est une application affine.

*Démonstration.* On a  $f(A) = f(B)$  si et seulement si  $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\overrightarrow{AB} \in \text{Ker}(\vec{f})$ . Par conséquent,  $f$  est injective si et seulement si  $\vec{f}$  est injective.

De plus,  $f(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}$  est un sous-espace affine dirigé par  $\vec{f}(E)$ . Par conséquent,  $f(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$  si et seulement si  $\vec{f}(E) = F$ . Donc  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est surjective si et seulement si  $\vec{f} : E \rightarrow F$  est surjective.  $\square$

## 2.4. Le groupe affine.

### 2.4.1. Rappels sur les groupes.

**Définition 14.** Un groupe  $(G, *)$  est un ensemble  $G$  muni d'une loi interne  $* : G \times G \rightarrow G$  tel que

- pour tous  $a, b, c \in G$ ,  $(a * b) * c = a * (b * c)$ ;
- il existe  $e \in G$  tel que pour tout  $a \in G$ ,  $a * e = e * a = a$ ;  $e$  est appelé l'élément neutre du groupe;
- pour tout  $a \in G$ , il existe un élément  $b$  tel que  $a * b = b * a = e$ ;  $b$  est appelé le symétrique de  $a$ .

L'ensemble des bijections de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{E}$ , muni de la loi interne de composition  $\circ$ , est un groupe; l'élément neutre est l'application identité  $\text{id}_{\mathcal{E}}$ ; le symétrique d'une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est l'application inverse  $f^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ .

**Définition 15.** On dit que  $(G', *)$  est un sous-groupe de  $(G, *)$  si  $G' \subseteq G$  et si  $(G', *)$  est un groupe dont la loi interne s'obtient par restriction de  $*$  à  $G' \times G'$ .

Pour montrer que  $(G', *)$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ , il suffit de montrer que :

- pour tous  $a, b \in G'$ , on a  $a * b \in G'$
- l'élément neutre de  $(G, *)$  appartient à  $G'$ ,
- pour tout  $a \in G'$ , le symétrique de  $a$  appartient à  $G'$ .

2.4.2. *Le groupe des bijections affine de  $\mathcal{E}$ .* Il suit des propriétés précédemment rappelées que l'ensemble

$$\text{GA}(\mathcal{E}) = \{f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \text{ bijection affine}\}$$

des bijections affines de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{E}$ , muni de la loi interne de composition, est un sous-groupe du groupe des bijections de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{E}$ . En effet,

- $\text{id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une bijection affine,
- si  $f$  et  $g$  sont des bijections affines, alors  $f \circ g$  est une bijection affine, et

- si  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une bijection affine, alors  $f^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une bijection affine.

**Remarque.** Lorsque  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ , ou si on fixe un repère cartésien pour identifier  $\mathcal{E}$  avec  $\mathbb{R}^2$ , alors toute application affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  s'exprime sous la forme :

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Une telle application est bijective si et seulement si sa partie linéaire  $\vec{f}$  est inversible. Étant donné que

$$\vec{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

la partie linéaire est inversible si et seulement si son déterminant  $ad - bc$  est non nul.

Il en est de même en toute dimension. On note  $\det(\vec{f})$  le déterminant de la partie linéaire de  $f$ .

**Proposition 10.** Une application affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est bijective si et seulement si  $\det(\vec{f}) \neq 0$ .

On étudiera plus tard dans le cours le sous-groupe des *isométries* d'un espace affine *euclidien*, particulièrement dans le cas où  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ . En attendant, voici un premier exemple

2.4.3. *Le groupe des homothéties-translations de  $\mathcal{E}$ .* On note

$$\text{HT}(\mathcal{E}) = \{\text{translations de } \mathcal{E}\} \cup \{\text{homothéties de } \mathcal{E}\}.$$

**Proposition 11.** Une application affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle de rapport  $k \in \mathbb{R}^*$  est

- une translation si  $k = 1$  ;
- une homothétie affine si  $k \neq 1$ .

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $f \in \text{HT}(\mathcal{E})$ . Alors

- soit  $f$  est une translation et sa partie linéaire est l'identité, c'est-à-dire une homothétie vectorielle de rapport 1 ;
- soit  $f$  est une homothétie affine de rapport  $k$  et sa partie linéaire est une homothétie vectorielle de même rapport.

Supposons maintenant que  $\vec{f} : E \rightarrow E$  est une homothétie vectorielle de rapport  $k$ . On doit montrer que  $f$  est une translation ou une homothétie. Si  $k = 1$ , on va montrer que c'est une translation. Si  $k \neq 1$ , on va montrer que c'est une homothétie.

On commence par traiter le cas  $k = 1$ . Dans ce cas,  $\vec{f} = \text{id}_E$ . Choisissons un point  $A \in \mathcal{E}$ . Alors, pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , on a

$$\begin{aligned} f(M) = f(A) + \overrightarrow{AM} &= M + \overrightarrow{Mf(A)} + \overrightarrow{AM} \\ &= M + \overrightarrow{Af(A)} = T_{\vec{v}}(M) \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \overrightarrow{Af(A)}. \end{aligned}$$

On traite maintenant le cas  $k \neq 1$ . On choisit de nouveau un point  $A \in \mathcal{E}$ . On pose  $B = f(A)$  et

$$C = A + \frac{1}{1-k} \overrightarrow{AB} \quad \text{de sorte que} \quad (1-k)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.$$

Alors, pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , on a

$$\begin{aligned} f(M) = B + k\overrightarrow{AM} &= C + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{CM} \\ &= C - (1-k)\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CM} = H_{C,k}(M). \quad \square \end{aligned}$$

**Proposition 12.**  $(\text{HT}(\mathcal{E}), \circ)$  est un sous-groupe de  $(\text{GA}(\mathcal{E}), \circ)$ .

*Démonstration.* L'identité de  $\mathcal{E}$  est une homothétie de rapport 1 ; c'est aussi une translation de vecteur nul. Cela fait deux raisons pour lesquelles  $\text{id}_{\mathcal{E}} \in \text{HT}(\mathcal{E})$ .

L'ensemble  $\text{HT}(\mathcal{E})$  est stable par composition. En effet, d'après la proposition 11, si  $f \in \text{GA}(\mathcal{E})$  et  $g \in \text{GA}(\mathcal{E})$  alors  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  sont des homothéties vectorielles. Notons  $k$  et  $k'$  leurs rapports respectifs. Alors, la partie linéaire de  $f \circ g$  est l'homothétie vectorielle de rapport  $kk'$ . L'application affine  $f \circ g$  est donc une translation (si  $kk' = 1$ ) ou une homothétie affine (si  $kk' \neq 1$ ). Enfin, si  $\text{HT}(\mathcal{E})$  est stable par passage à l'inverse. En effet,

- toute translation  $T_{\vec{v}}$  admet la translation  $T_{-\vec{v}}$  pour inverse et
- toute homothétie  $H_{A,k}$  admet l'homothétie  $H_{A,1/k}$  pour inverse.  $\square$

On a le résultat plus précis suivant :

- la composée de deux translations est une translation ;
- la composée d'une translation et d'une homothétie affine de rapport  $k \neq 1$  est une homothétie affine de rapport  $k$  ;
- la composée de deux homothéties affines de rapports  $k$  et  $k'$  est
  - une homothétie de rapport  $kk'$  si  $kk' \neq 1$  ;
  - une translation si  $kk' = 1$ .

**2.5. Le théorème de Thalès.** Nous allons maintenant mettre en évidence un lien entre les projections affines et le théorème de Thalès.

**Définition 16.** Si trois points distincts  $A, B, C \in \mathcal{E}$  sont alignés, on note  $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}$  le réel  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ .

Pour énoncer le théorème de Thalès dans un espace de dimension quelconque, nous devons introduire la notion d'hyperplan.

**Définition 17.** Un hyperplan affine  $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$  est un sous-espace affine de dimension  $\dim(\mathcal{E}) - 1$ .

**Exemple.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , un hyperplan est une droite, et dans  $\mathbb{R}^3$ , un hyperplan est un plan.



**Théorème 1.** Dans un espace affine  $\mathcal{E}$ , on se donne trois hyperplans parallèles distincts  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  et deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  non faiblement parallèles à ces hyperplans. On note

- $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  les points d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec respectivement  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  et
- $A'_0$ ,  $A'_1$  et  $A'_2$  les points d'intersection de  $\mathcal{D}'$  avec respectivement  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ .

Alors

$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A_2}} = \frac{\overline{A'_0A'_1}}{\overline{A'_0A'_2}}.$$

La figure 1 présente une configuration correspondant au cas d'un espace affine de dimension 3. Les hyperplans sont des plans (de dimension 2).

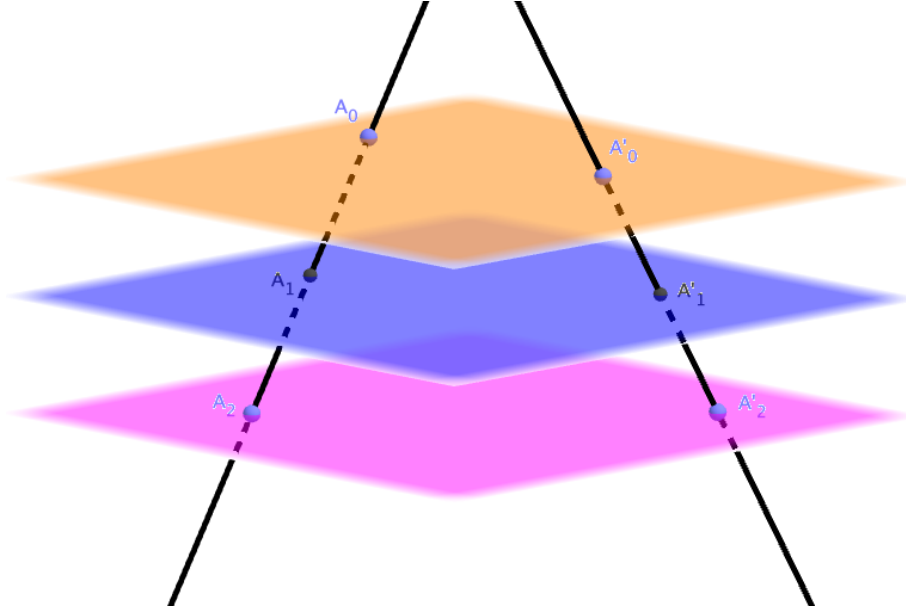


FIGURE 1. Configuration du théorème de Thalès

*Démonstration du théorème de Thalès.* Soit  $H$  la direction commune de  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ . Étant donné que la droite  $\mathcal{D}'$  n'est pas faiblement parallèle aux hyperplans, on peut considérer la projection  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  sur  $\mathcal{D}'$  parallèlement à  $H$ . On a

$$p(A_0) = A'_0, \quad p(A_1) = A'_1 \quad \text{et} \quad p(A_2) = A'_2.$$

Posons

$$\lambda = \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A_2}} \quad \text{de sorte que} \quad \overrightarrow{A_0A_1} = \lambda \overrightarrow{A_0A_2}.$$

Alors

$$\overrightarrow{A'_0A'_1} = \vec{p}(\overrightarrow{A_0A_1}) = \vec{p}(\lambda \overrightarrow{A_0A_2}) = \lambda \vec{p}(\overrightarrow{A_0A_2}) = \lambda \overrightarrow{A'_0A'_2}$$

d'où

$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A_2}} = \lambda = \frac{\overline{A'_0A'_1}}{\overline{A'_0A'_2}}. \quad \square$$

Le théorème de Thalès s'énonce également dans le cas particulier où les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont sécantes en  $A_0 = A'_0$ . On a alors une égalité supplémentaire.

**Théorème 2.** Dans un espace affine  $\mathcal{E}$ , on se donne deux hyperplans parallèles distincts  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  et deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  non faiblement parallèles à ces hyperplans et sécantes en un point  $A \notin \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ . On note

- $A_1, A_2$  les points d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec respectivement  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  et
- $A'_1, A'_2$  les points d'intersection de  $\mathcal{D}'$  avec respectivement  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ .

Alors, il existe un réel  $\lambda \neq 0$  tel que

$$\overrightarrow{AA_1} = \lambda \overrightarrow{AA_2}, \quad \overrightarrow{AA'_1} = \lambda \overrightarrow{AA'_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_1A'_1} = \lambda \overrightarrow{A_2A'_2}.$$

*Démonstration.* Les deux premières égalités découlent de la version générale du théorème de Thalès en considérant l'hyperplan  $\mathcal{H}_0$  parallèle à  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  passant par  $A$ . On a alors

$$\overrightarrow{A_1A'_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AA'_1} = \lambda \overrightarrow{A_2A} + \lambda \overrightarrow{AA'_2} = \lambda (\overrightarrow{A_2A} + \overrightarrow{AA'_2}) = \lambda \overrightarrow{A_2A'_2}. \quad \square$$

### 3. BARYCENTRES

Dans toute cette partie,  $\mathcal{E}$  est un espace affine dirigé par  $E$ .

#### 3.1. Définition et exemples.

**Théorème 3.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine,  $(A_0, \dots, A_k)$  des points de  $\mathcal{E}$  et  $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$  des réels tels que

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_k \neq 0.$$

Alors, il existe un unique point  $M \in \mathcal{E}$  tel que

$$\alpha_0 \overrightarrow{A_0M} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{A_kM} = \vec{0}.$$

*Démonstration.* Choisissons une origine  $O \in \mathcal{E}$ . D'après le relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \alpha_0 \overrightarrow{A_0M} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{A_kM} &= \alpha_0 \overrightarrow{A_0O} + \alpha_0 \overrightarrow{OM} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{A_kO} + \alpha_k \overrightarrow{OM} \\ &= (\alpha_0 + \dots + \alpha_k) \overrightarrow{OM} - (\alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}). \end{aligned}$$

Étant donné que  $\alpha_0 + \dots + \alpha_k \neq 0$ , on a

$$\alpha_0 \overrightarrow{A_0M} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{A_kM} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OM} = \frac{\alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}}{\alpha_0 + \dots + \alpha_k}. \quad \square$$

A partir de maintenant, pour alléger les notations, on considère des familles finies de points pondérés  $((A_i, \alpha_i)_{i \in I})$  avec  $A_i \in \mathcal{E}$  et  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , où  $I$  est un ensemble **fini**.

**Définition 18.** Le barycentre (pondéré) d'une famille de points pondérés  $((A_i, \alpha_i)_{i \in I})$  avec  $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$  est l'unique point

$$M = \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I}) \quad \text{tel que} \quad \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{A_i M} = \vec{0}.$$

**Remarque.** La définition du barycentre ne dépend pas de l'ordre des points pondérés.

**Remarque.** Si  $\lambda \neq 0$ , alors

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{A_i M} = \vec{0} \quad \iff \quad \sum_{i \in I} \lambda \alpha_i \overrightarrow{A_i M} = \vec{0}.$$

Par conséquent,

$$\forall \lambda \neq 0, \quad \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I}) = \text{Bar}((A_i, \lambda \alpha_i)_{i \in I}).$$

Sans perte de généralité, quitte à diviser chaque poids  $\alpha_i$  par la somme totale  $\sum_{i \in I} \alpha_i$ , on peut donc supposer que  $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ .

**Exemples.**

- Si  $A, B \in \mathcal{E}$  sont deux points de  $\mathcal{E}$  et si  $M$  est le milieu du segment  $[AB]$ , alors  $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ , c'est-à-dire  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ . Par conséquent,  $M = \text{Bar}((A, 1), (B, 1))$ .
- Plus généralement, l'isobarycentre d'une famille de points  $(A_i)_{i \in I}$  est le barycentre  $\text{Bar}((A_i, 1)_{i \in I})$ .

La démonstration du théorème 3 montre le résultat suivant.

**Proposition 13.** Soit  $((A_i, \alpha_i)_{i \in I})$  une famille de points de  $\mathcal{E}$  pondérée avec  $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) le point  $M = \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I})$  ;
- (2)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, M = \text{Bar}((A_i, \lambda \alpha_i)_{i \in I})$  ;
- (3)  $\exists O \in \mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}}{\alpha_0 + \cdots + \alpha_k}$  ;
- (4)  $\forall O \in \mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}}{\alpha_0 + \cdots + \alpha_k}$ .

Dans l'exemple précédent, nous avons utilisé la notion de segment, sans avoir défini ce qu'est un segment. Intuitivement, le segment  $[AB]$  est la partie de la droite affine  $(AB)$  passant par  $A$  et  $B$  qui est comprise entre les points  $A$  et  $B$ . Autrement dit, c'est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$  avec  $\lambda \in [0, 1]$ . On a alors,  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AM} + \lambda \overrightarrow{MB}$ , d'où

$$(1 - \lambda) \overrightarrow{AM} + \lambda \overrightarrow{BM} = \vec{0}.$$

Autrement dit,

$$M = \text{Bar}((A, 1 - \lambda), (B, \lambda)).$$

Etant donné que  $(1 - \lambda) + \lambda = 1$ , nous allons utiliser la définition équivalente suivante.

**Définition 19.** Si  $A$  et  $B$  sont deux points de  $\mathcal{E}$ , le segment  $[AB]$  est l'ensemble

$$[AB] = \{ \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta)) ; \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \text{ et } \alpha + \beta = 1 \}.$$

Remarque : la notion de segment ou de milieu d'un segment peut donc se définir à l'aide de barycentres uniquement. Ces notions ne dépendent donc pas de la notion de distance entre les points.

Cette approche est liée à la notion de *convexité* très importante en géométrie (et ailleurs, probabilités, analyse, ...).

**Définition 20.** Un point  $M \in \mathcal{E}$  est une combinaison convexe des points  $(A_i)_{i \in I}$  si

$$M = \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I}) \quad \text{avec} \quad \alpha_i \geq 0 \text{ pour chaque } i \in I \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \alpha_i = 1.$$

En particulier

$$[AB] = \{ \text{combinaisons convexes de } A \text{ et } B \}.$$

On peut définir le triangle  $ABC$  d'une manière analogue.

**Définition 21.** Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points de  $\mathcal{E}$ , le triangle  $ABC$  est l'ensemble des combinaisons convexes des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**3.2. Associativité du barycentre.** Rappelons qu'une partition de  $I$  est une collection  $(J_k)_{k \in K}$  de parties de  $I$  telle que :

$$I = \bigcup_{k \in K} J_k \quad \text{et} \quad J_{k_1} \cap J_{k_2} = \emptyset \text{ si } k_1 \neq k_2.$$

**Proposition 14.** Soit  $(J_k)_{k \in K}$  une partition d'un ensemble fini  $I$ . Soit  $(A_i)_{i \in I}$  des points de  $\mathcal{E}$  et  $(\alpha_i)_{i \in I}$  et  $(\beta_k)_{k \in K}$  des réels tels que :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta_k = \sum_{j \in J_k} \alpha_j \neq 0 \text{ pour chaque } k \in K.$$

Alors  $\sum_{k \in K} \beta_k \neq 0$  et

$$\text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I}) = \text{Bar}((B_k, \beta_k)_{k \in K}) \quad \text{avec} \quad B_k = \text{Bar}((A_j, \alpha_j)_{j \in J_k}).$$

*Démonstration.* Tout d'abord  $\sum_{k \in K} \beta_k = \sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$ . Les barycentres  $B_k$  sont donc bien définis.

Ensuite, posons  $G = \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I})$ . On a donc

$$\begin{aligned}
 \vec{0} = \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{A_i G} &= \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_k} \alpha_j \overrightarrow{A_j G} \\
 &= \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_k} (\alpha_j \overrightarrow{A_j B_k} + \alpha_j \overrightarrow{B_k G}) \\
 &= \sum_{k \in K} \underbrace{\left( \sum_{j \in J_k} \alpha_j \overrightarrow{A_j B_k} \right)}_{=\vec{0}} + \sum_{k \in K} \left( \sum_{j \in J_k} \alpha_j \right) \overrightarrow{B_k G} \\
 &= \sum_{k \in K} \beta_k \overrightarrow{B_k G}.
 \end{aligned}$$

Cela montre que  $G = \text{Bar}((B_k, \beta_k)_{k \in K})$ . □

**Exemple.**

— Considérons le cas de 3 points  $A_1, A_2, A_3$  dans  $\mathbb{R}^2$  et posons

$$G = \text{Bar} \left( \left( A_1, \frac{1}{4} \right), \left( A_2, \frac{1}{4} \right), \left( A_3, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Posons par ailleurs

$$B = \text{Bar} \left( \left( A_1, \frac{1}{4} \right), \left( A_2, \frac{1}{4} \right) \right).$$

Alors  $B$  est le milieu de  $[A_1 A_2]$  et

$$G = \text{Bar} \left( \left( B, \frac{1}{2} \right), \left( A_3, \frac{1}{2} \right) \right)$$

est le milieu de  $[B A_3]$ .

— Considérons de nouveau le cas de 3 points  $A, B, C$  dans un espace affine et posons

$$G = \text{Bar} \left( \left( A, \frac{1}{3} \right), \left( B, \frac{1}{3} \right), \left( C, \frac{1}{3} \right) \right).$$

Posons de plus

$$A' = \text{Bar} \left( \left( B, \frac{1}{3} \right), \left( C, \frac{1}{3} \right) \right), \quad B' = \text{Bar} \left( \left( C, \frac{1}{3} \right), \left( A, \frac{1}{3} \right) \right)$$

et

$$C' = \text{Bar} \left( \left( A, \frac{1}{3} \right), \left( B, \frac{1}{3} \right) \right).$$

Alors  $A'$  est le milieu de  $[BC]$ ,  $B'$  est le milieu de  $[CA]$  et  $C'$  est le milieu de  $[AB]$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar} \left( \left( A, \frac{1}{3} \right), \left( A', \frac{2}{3} \right) \right) \\ &= \text{Bar} \left( \left( B, \frac{1}{3} \right), \left( B', \frac{2}{3} \right) \right) = \text{Bar} \left( \left( C, \frac{1}{3} \right), \left( C', \frac{2}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

appartient aux trois segments  $[AA']$ ,  $[BB']$  et  $[CC']$ . Cela montre que les trois médianes d'un triangle sont concourantes et que le point d'intersection est l'isobarycentre du triangle.

**Proposition 15.** Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $E$ . Le point  $M \in \mathcal{E}$  appartient à la droite  $(AB)$  si et seulement si  $M = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$ . Dans ce cas, si  $M \neq B$ , alors

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $M = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$ . Alors  $\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} = \vec{0}$  ce qui montre que  $A$ ,  $B$  et  $M$  sont alignés. En effet,  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  car  $\alpha + \beta \neq 0$ .

Supposons maintenant que le point  $M$  appartient à la droite  $(AB)$ . Alors,  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$  et par définition,  $\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ . De même,  $\overrightarrow{BM} = \mu \overrightarrow{BA}$  avec  $\mu = \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}}$ . Observons que

$$\lambda + \mu = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = 1 \neq 0.$$

De plus,

$$\mu \overrightarrow{AM} + \lambda \overrightarrow{BM} = \mu \lambda \overrightarrow{AB} + \lambda \mu \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

Donc  $M = \text{Bar}((A, \mu), (B, \lambda))$ .

Enfin, si  $M \neq B$  et  $M = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))$ , alors  $\alpha \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$  et

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = -\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad \square$$

### 3.2.1. Caractérisation de sous-espaces affines.

**Définition 22.** On dit qu'une partie non vide  $X \subseteq \mathcal{E}$  est stable par barycentration si pour toute famille finie  $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$  de points pondérés avec  $A_i \in X$  et  $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$ , on a  $\text{Bar}((A_i, \alpha_i)) \in X$ .

**Proposition 16.** Une partie non vide  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est stable par barycentration.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F}$  une partie non vide de  $\mathcal{E}$  et  $O$  un point de  $\mathcal{F}$ . Supposons que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $F$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F} = O + F$ . Si  $M = \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I})$  avec  $A_i \in F$  et  $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$ , alors

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}}{\alpha_0 + \cdots + \alpha_k} \in F$$

et donc  $M \in O + F = \mathcal{F}$ . L'espace  $\mathcal{F}$  est donc stable par barycentration. Supposons maintenant que  $\mathcal{F}$  est stable par barycentration. Posons

$$F := \{\overrightarrow{OM} ; M \in \mathcal{F}\}$$

de sorte que  $\mathcal{F} = O + F$ . Il suffit de montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Le vecteur nul  $\overrightarrow{OO}$  appartient à  $F$ . De plus si  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in F$ , c'est-à-dire si  $A, B \in \mathcal{F}$ , alors  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$  avec

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO}}{1 + 1 - 1}, \quad \text{c'est-à-dire } C = \text{Bar}((A, 1), (B, 1), (O, -1)).$$

Comme  $\mathcal{F}$  est stable par barycentration,  $C \in \mathcal{F}$  et donc  $\overrightarrow{OC} \in F$ .  $\square$

**3.2.2. Points affinement indépendants.** Rappelons que l'espace affine  $\text{Aff}(X)$  engendré par un ensemble  $X \subseteq \mathcal{E}$  est l'intersection de tous les sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  contenant  $X$ .

**Lemme 5.** Soient  $k+1$  points  $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ . Alors l'espace affine  $\text{Aff}(A_0, \dots, A_k)$  est de dimension inférieure ou égale à  $k$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 1, l'espace  $\text{Aff}(A_0, \dots, A_k)$  est dirigé par  $\text{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$ . Par conséquent, la dimension de  $\text{Aff}(A_0, \dots, A_k)$  est égale à celle de  $\text{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$ , qui est elle-même inférieure ou égale à  $k$ .  $\square$

**Définition 23.** Les  $k+1$  points  $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{E}$  sont *affinement indépendants* si l'espace affine  $\text{Aff}(A_0, \dots, A_k)$  est de dimension  $k$ .

**Exemple.**

- Deux points  $A_0, A_1 \in \mathcal{E}$  sont affinement indépendants si et seulement s'ils sont distincts.
- Trois points  $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{E}$  sont affinement indépendants si et seulement s'ils ne sont pas alignés.
- Quatre points  $A_0, A_1, A_2, A_4 \in \mathcal{E}$  sont affinement indépendants si et seulement s'ils ne sont pas coplanaires.

**Proposition 17.** Les points  $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{E}$  sont affinement indépendants si et seulement si  $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$  est une famille libre.

*Démonstration.* L'espace  $\text{Aff}(A_0, \dots, A_k)$  est dirigé par  $\text{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$ . Ce dernier est de dimension  $k$  si et seulement si  $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$  est une famille libre.  $\square$

### 3.3. Coordonnées barycentriques.

**Définition 24.** Un repère affine d'un espace affine  $\mathcal{E}$  de dimension  $n$  est la donnée de  $(n + 1)$  points  $(A_0, \dots, A_n)$  affinement indépendants.

Notons que  $(A_0, \dots, A_n)$  est un repère affine de  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $(A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$  est un repère cartésien de  $\mathcal{E}$ .

**Proposition 18.** Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de points de  $\mathcal{E}$ . Alors

$$\text{Aff}(\{A_i\}_{i \in I}) = \left\{ M ; \exists (\alpha_i)_{i \in I} \text{ avec } \sum_{i \in I} \alpha_i = 1 \text{ et } M = \text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in I} \right\}.$$

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer que  $I = \{0, 1, \dots, k\}$ . Alors,  $M \in \text{Aff}(\{A_i\}_{i \in I})$  si et seulement si il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tels que

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i} &\iff \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{MA_i}) \\ &\iff \sum_{i=0}^k \alpha_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{0} \text{ avec } \alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposition 19.** Si les points  $(A_i)_{i \in I}$  sont affinement indépendants, pour tout  $M \in \text{Aff}(\{A_i\}_{i \in I})$ , il existe une unique famille  $(\alpha_i)_{i \in I}$  telle que

$$M = \text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in I} \quad \text{avec} \quad \sum_{i \in I} \alpha_i = 1.$$

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer que  $I = \{0, 1, \dots, k\}$ . D'après la proposition précédente,  $M \in \text{Aff}(\{A_i\}_{i \in I})$  si et seulement si

$$M = \text{Bar}((A_0, \alpha_0), \dots, (A_k, \alpha_k)) \text{ avec } \alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1.$$

Alors

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Si les vecteurs  $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$  sont linéairement indépendants, alors les poids  $(\alpha_i)_{i \geq 1}$  sont uniquement déterminés et comme  $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ , le poids  $\alpha_0$  est également uniquement déterminé.  $\square$

**Définition 25.** Soit  $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$  un repère affine de  $\mathcal{E}$ . Les coordonnées barycentriques du point  $M \in \mathcal{E}$  dans le repère  $\mathcal{R}$  est l'unique  $(n+1)$ -uplet  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  tel que

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1 \quad \text{et} \quad M = \text{Bar}((A_0, \alpha_0), \dots, (A_n, \alpha_n)).$$



**3.4. Applications affines et barycentres.** Nous dirons que application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  préserve les barycentres si

$$G = \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I}) \implies f(G) = \text{Bar}((f(A_i), \alpha_i)_{i \in I}).$$

**Théorème 4.** Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  une application. Alors,  $f$  est affine si et seulement si  $f$  préserve les barycentres.

*Démonstration.* Commençons par montrer que si  $f$  est une application affine, alors  $f$  préserve les barycentres. Supposons que  $G = \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I})$ , c'est-à-dire que

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{A_i G} = \vec{0}.$$

Alors

$$\vec{0} = \vec{f}(\vec{0}) = \vec{f}\left(\sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{A_i G}\right) = \sum_{i \in I} \alpha_i \vec{f}(\overrightarrow{A_i G}) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{f(A_i) f(G)}.$$

On a donc

$$f(G) = \text{Bar}((f(A_i), \alpha_i)_{i \in I}).$$

Supposons maintenant que  $f$  préserve les barycentres, et choisissons un repère affine  $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$  de  $\mathcal{E}$ . Posons

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{A_0 A_1}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \overrightarrow{A_0 A_n}$$

de sorte que la famille  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  est une base de  $E$ . Soit  $\vec{f} : E \rightarrow F$  l'application linéaire définie sur la base  $\mathcal{B}$  par :

$$\vec{f}(\vec{e}_1) = \overrightarrow{f(A_0) f(A_1)}, \quad \dots, \quad \vec{f}(\vec{e}_n) = \overrightarrow{f(A_0) f(A_n)}.$$

Soit  $\vec{v} \in E$  un vecteur de coordonnées  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \vec{f}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f(A_0) f(A_i)}.$$

De plus

$$A_0 + \vec{v} = \text{Bar}((A_0, \alpha_0), \dots, (A_n, \alpha_n)) \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n).$$

Étant donné que  $f$  préserve les barycentres, on a

$$\begin{aligned} f(A_0 + \vec{v}) &= \text{Bar}((f(A_0), \alpha_0), \dots, (f(A_n), \alpha_n)) \\ &= f(A_0) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f(A_0) f(A_i)} = f(A_0) + \vec{f}(\vec{v}). \end{aligned}$$

Ceci montre que  $f$  est une application affine. □

**3.5. Longueurs, aires et volumes algébriques.**

3.5.1. *Orientation et rapports de volumes.* Étant données deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  d'un espace vectoriel  $E$ , on note  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ . Cette matrice est inversible et son déterminant est non nul.

**Définition 26.** On dit que les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  induisent la même orientation de  $E$  si  $\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) > 0$ . Sinon, on dit qu'elles induisent des orientations opposées.

Orienter un espace vectoriel, c'est choisir une base  $\mathcal{B}$ . Toute base  $\mathcal{B}'$  induisant la même orientation que  $\mathcal{B}$  sera dite *directe*. Sinon, elle est dite *indirecte*.

**Remarque.** Les bases  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  et  $\mathcal{B}' = (\vec{e}_2, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  induisent des orientations opposées. En effet,

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = -1.$$

**Définition 27.** Deux repères affines  $(A_0, \dots, A_n)$  et  $(A'_0, \dots, A'_n)$  de  $\mathcal{E}$  induisent la même orientation de  $\mathcal{E}$  si les bases  $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$  et  $(\overrightarrow{A'_0A'_1}, \dots, \overrightarrow{A'_0A'_n})$  induisent la même orientation de  $E$ . Les repères induisent des orientations opposées sinon.

En fait, il est bénéfique de penser à  $\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})$  comme à un rapport de volumes  $n$ -dimensionnels algébriques. Le volume 1-dimensionnel est la longueur, le volume 2-dimensionnel est l'aire, le volume 3-dimensionnel est le volume, etc.

### Exemples.

- Dans une droite  $\mathcal{D}$  dirigée par  $D$ , considérons deux repères  $\mathcal{R} = (A, B)$  et  $\mathcal{R}' = (A', B')$ . Alors,  $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB})$  et  $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{A'B'})$  sont deux bases de  $D$ , et

$$\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = \pm \frac{\text{Longueur}(A'B')}{\text{Longueur}(AB)},$$

le rapport des longueurs des segments étant positif si  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  induisent la même orientation, négatif sinon. Nous avons précédemment noté ce rapport  $\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}$  pour énoncer le théorème de Thalès.

- Dans un plan  $\mathcal{P}$  dirigé par  $P$ , considérons deux repères affines  $(A, B, C)$  et  $(A', B', C')$ , ainsi que les deux bases  $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$  de  $P$ . Alors,

$$\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = \pm \frac{\text{Aire}(A'B'C')}{\text{Aire}(ABC)},$$

le rapport des aires des triangles étant positif si les repères induisent la même orientation, négatif sinon.

- Dans  $\mathbb{R}^3$ , considérons deux repères  $(A, B, C, D)$  et  $(A', B', C', D')$ , ainsi que les bases  $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  et  $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D'})$  de  $\mathbb{R}^3$ . Alors,

$$\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = \pm \frac{\text{Volume}(A'B'C'D')}{\text{Volume}(ABCD)},$$

le rapport des volumes des tétraèdres étant positif si les repères induisent la même orientation de  $\mathbb{R}^3$  et négatif sinon.

Ces considérations nous conduisent aux notations suivantes.

**Définition 28.** Soit  $(A_0, \dots, A_n)$  un repère de  $\mathcal{E}$ . Étant donnés  $n+1$  points  $(B_0, \dots, B_n)$  de  $E$ , on pose

$$\frac{\overline{B_0 B_1 \dots B_n}}{\overline{A_0 A_1 \dots A_n}} = \det_{(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})}(\overrightarrow{B_0 B_1}, \dots, \overrightarrow{B_0 B_n}).$$

Rappelons que le déterminant d'un endomorphisme  $\vec{f} : E \rightarrow E$  est bien défini et ne dépend pas du choix d'une base.

**Définition 29.** Si  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une application affine, on note  $\det(f)$  le déterminant de sa partie linéaire.

On a alors l'interprétation suivante : si  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une application affine, alors pour tout repère affine  $(A_0, \dots, A_n)$  de  $\mathcal{E}$ , on a

$$\det(f) = \frac{\overline{f(A_0)f(A_1)\dots f(A_n)}}{\overline{A_0 A_1 \dots A_n}}.$$

### 3.5.2. Interprétation des coordonnées barycentriques en dimension 2.

**Proposition 20.** Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $\mathcal{E}$  soit  $M$  un point de la droite  $(AB)$  et soient  $(\alpha, \beta)$  les coordonnées barycentriques de  $M$  dans le repère affine  $(A, B)$  de la droite  $(AB)$ . Alors

$$\alpha = \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.$$

*Démonstration.* On a

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} \overrightarrow{BA}.$$

Donc

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} \overrightarrow{AM} + \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \overrightarrow{BM} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \overrightarrow{AB} + \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

Cela montre que

$$M = \text{Bar} \left( \left( A, \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} \right), \left( B, \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \right) \right).$$

De plus

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = 1.$$

Donc les coordonnées barycentriques  $(\alpha, \beta)$  de  $M$  dans le repère affine  $(A, B)$  de la droite  $(AB)$  sont

$$\alpha = \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}. \quad \square$$

**3.5.3. Interprétation des coordonnées barycentriques en dimension 2.** Comme nous venons de le mentionner, dans un espace affine de dimension 2, le rapport d'aires algébriques est une notion affine. Nous allons maintenant donner une interprétation des coordonnées barycentriques en termes de rapports d'aires algébriques de triangles.

**Théorème 5.** Soit  $(A_0, A_1, A_2)$  un repère d'un plan affine  $\mathcal{E}$ . Pour tout point  $M \in \mathcal{E}$ , les coordonnées barycentriques de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  sont

$$\alpha_0 = \frac{\overline{A_1 A_2 M}}{\overline{A_1 A_2 A_0}}, \quad \alpha_1 = \frac{\overline{A_2 A_0 M}}{\overline{A_2 A_0 A_1}} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{\overline{A_0 A_1 M}}{\overline{A_0 A_1 A_2}}.$$

*Démonstration.* Soient  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  les coordonnées barycentriques de  $M$  dans le repère affine  $(A_0, A_1, A_2)$ . L'ordre des points ne jouant pas de rôle particulier, il suffit de montrer que

$$\alpha_2 = \frac{\overline{A_0 A_1 M}}{\overline{A_0 A_1 A_2}} = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 M}), \quad \text{avec} \quad \mathcal{B} = (\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2}).$$

Comme vu précédemment,

$$\overrightarrow{A_0 M} = \alpha_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_0 A_2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 M}) &= \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_0 A_1}, \alpha_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_0 A_2}) \\ &= \alpha_1 \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_1})}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2})}_{=1} = \alpha_2. \quad \square \end{aligned}$$

#### 4. ESPACES EUCLIDIENS

Dans cette partie,  $E$  est un espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ; et  $\mathcal{E}$  est un espace affine dirigé par  $E$ .

##### 4.1. Angles.

4.1.1. *Angles non orientés.* Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Théorème 6.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de  $E$ , alors

$$|\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

*Démonstration.* Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , le résultat est évident. On suppose donc que  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . On a alors

$$0 \leq \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\|^2 = 2 + 2 \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad 0 \leq \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} - \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\|^2 = 2 - 2 \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

On en déduit que

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1,$$

$$\frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = -1 \iff \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{0}$$

et

$$\frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = 1 \iff \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} - \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{0}.$$

□

On peut donc donner la définition suivante.

**Définition 30.** L'angle non orienté entre deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le réel  $\theta \in [0, \pi]$  tel que

$$(6) \quad \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Autrement dit, l'angle non orienté entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est

$$\text{Arccos} \left( \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right) \in [0, \pi].$$

4.1.2. *Angles orientés.* On suppose maintenant que  $E$  est de dimension 2 et on choisit une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Ce choix de base nous permet de définir une orientation sur  $E$ .

**Lemme 6.** Pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ , on a :

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2 + (\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}))^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

*Démonstration.* On note  $(u_1, u_2)$  les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $(v_1, v_2)$  les coordonnées de  $\vec{v}$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2 + (\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}))^2 &= (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\ &= u_1^2 v_1^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 + u_2^2 v_2^2 + u_1^2 v_2^2 - 2u_1 v_2 u_2 v_1 + u_2^2 v_1^2 \\ &= u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Lorsque les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, il existe deux angles  $\theta$  modulo  $2\pi$  tels que l'équation (6) soit valide. Le résultat précédent permet de faire un choix.

**Définition 31.** Étant donné une base orthonormée  $\mathcal{B}$  orientant  $E$ , l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est l'angle  $\theta$  modulo  $2\pi$  tel que

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \quad \text{et} \quad \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta.$$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, on dit que la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  est directe lorsque  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$  et indirecte si  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) < 0$ . L'angle orienté entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  admet

- un représentant dans  $]0, \pi[$  lorsque la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  est directe et
- un représentant dans  $]-\pi, 0[$  lorsque la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  est indirecte.

**4.2. Produit vectoriel.** On suppose maintenant que  $\dim(E) = 3$  et que  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée de  $E$ , qui permet donc de définir une orientation de  $E$ . On peut alors définir le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de la manière suivante.

**Proposition 21.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de  $E$ , il existe un unique vecteur  $\vec{n} \in E$  tel que pour tout  $\vec{w} \in E$ , on a

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{n} | \vec{w} \rangle.$$

*Démonstration.* Pour l'existence, on note  $(u_1, u_2, u_3)$  les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $(v_1, v_2, v_3)$  les coordonnées de  $\vec{v}$ . Si  $\vec{w}$  a pour coordonnées  $(w_1, w_2, w_3)$ , alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3 \\ &= \left\langle \left( \begin{array}{c} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{array} \right) \middle| \left( \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Pour l'unicité, on suppose que  $\langle \vec{n}_1 | \vec{w} \rangle = \langle \vec{n}_2 | \vec{w} \rangle$  pour tout  $\vec{w} \in E$ , en particulier pour  $\vec{w} = \vec{n}_1 - \vec{n}_2$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}_1 | \vec{n}_1 - \vec{n}_2 \rangle &= \langle \vec{n}_2 | \vec{n}_1 - \vec{n}_2 \rangle \implies 0 = \langle \vec{n}_1 - \vec{n}_2 | \vec{n}_1 - \vec{n}_2 \rangle = \|\vec{n}_1 - \vec{n}_2\|^2 \\ &\implies \vec{n}_1 = \vec{n}_2. \quad \square \end{aligned}$$

Cette démonstration montre que si on note  $(u_1, u_2, u_3)$  les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $(v_1, v_2, v_3)$  les coordonnées de  $\vec{v}$ , alors les coordonnées de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  sont  $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ .

**Définition 32.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de  $E$ , alors le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est l'unique vecteur de  $E$  tel que pour tout  $\vec{w} \in E$ , on a

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{w} \rangle.$$

**Lemme 7.** Pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ , on a

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$$

*Démonstration.* Pour tout  $\vec{w} \in E$ , on a

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\langle \vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle -\vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{w} \rangle. \quad \square$$

**Lemme 8.** Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

*Démonstration.* Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, alors  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 = \langle \vec{0} | \vec{w} \rangle$  pour tout  $\vec{w} \in E$ . Donc  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, alors on peut trouver un vecteur  $\vec{w}$  de  $E$  tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit une base de  $E$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ , ce qui montre que  $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ .  $\square$

**Lemme 9.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, alors  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe de  $E$ .

*Démonstration.* On a

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = \langle \vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 > 0. \quad \square$$

**Lemme 10.** Le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ .

*Démonstration.* On a

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{u} \rangle = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{v} \rangle = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0. \quad \square$$

**Lemme 11.** Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  de  $E$ , on a la relation

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

*Démonstration.* Soient  $(u_1, u_2, u_3)$  les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$  et soient  $(v_1, v_2, v_3)$  les coordonnées de  $\vec{v}$ . Alors les coordonnées de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  sont  $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 &= (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ &= u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2). \end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire 2.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et si  $\theta \in [0, \pi]$  est l'angle non orienté entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , alors

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta.$$

*Démonstration.* On a

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \theta = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta. \quad \square$$

### 4.3. Isométries vectorielles.

## 4.3.1. Définition et propriétés.

**Définition 33.** Soit  $\vec{f}$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $\vec{f}$  est une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) si  $\vec{f}$  conserve le produit scalaire, i.e., si on a :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \quad \langle \vec{f}(\vec{u}) | \vec{f}(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle.$$

Dans les remarques suivantes  $\vec{f}$  désigne une isométrie vectorielle.

**Exercice 9.** Montrez que  $\vec{f}$  conserve aussi la norme :  $\|\vec{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$  (d'où le nom d'isométrie). Réciproquement, si  $\vec{f} \in L(E)$  conserve la norme, montrez qu'elle conserve aussi le produit scalaire.

**Exercice 10.** Si  $\vec{f}$  est une isométrie, montrez que  $\vec{f}$  est injective, donc bijective (ceci justifie l'appellation "automorphisme"), c'est-à-dire inversible.

**Exercice 11.** Montrez que  $\vec{f}$  conserve l'orthogonalité : si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dans  $E$  on a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \implies \vec{f}(\vec{u}) \perp \vec{f}(\vec{v}).$$

**Proposition 22.** L'ensemble  $O(E)$  des isométries de  $E$  est un groupe pour la composition. C'est un sous-groupe de  $GL(E)$ , le groupe des applications inversibles.

*Démonstration.* On a vu précédemment que toute isométrie est inversible. Donc  $O(E) \subseteq GL(E)$ . Il suffit donc de montrer que  $O(E)$  contient l'élément neutre de  $GL(E)$ , qu'il est stable par composition et par inverse.

- (1) L'identité est une isométrie.
- (2) Si  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  sont des isométries, alors

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \quad \langle \vec{f} \circ \vec{g}(\vec{u}) | \vec{f} \circ \vec{g}(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{g}(\vec{u}) | \vec{g}(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle.$$

Donc  $\vec{f} \circ \vec{g}$  est une isométrie.

- (3) Si  $\vec{f}$  est une isométrie, alors

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{f} \circ \vec{f}^{-1}(\vec{u}) | \vec{f} \circ \vec{f}^{-1}(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{f}^{-1}(\vec{u}) | \vec{f}^{-1}(\vec{v}) \rangle.$$

Donc  $\vec{f}^{-1}$  est une isométrie. □

Supposons l'espace  $E$  muni d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$ , soit  $\vec{f}$  une isométrie et  $A$  sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in E$  et  $\vec{u}, \vec{v}$  les matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ . La préservation du produit scalaire se traduit alors en  ${}^t\vec{u}\vec{v} = {}^t\vec{u}A A\vec{v}$  pour tous  $\vec{u}, \vec{v}$ , ou encore  ${}^tAA = I$ . Une telle matrice  $A$  est dite orthogonale et  $\vec{f}$  est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale. L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe (multiplicatif) du groupe  $GL(n, \mathbb{R})$  des matrices inversibles encore appelé groupe orthogonal et noté  $O(n, \mathbb{R})$ .

**Proposition 23.** Si  $\vec{f}$  est une isométrie de  $E$ , alors  $\det(\vec{f}) = \pm 1$ .



*Démonstration.* On se donne une base orthonormée  $\mathcal{B}$  et on note  $A$  la matrice de  $\vec{f}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors

$$1 = \det(I) = \det({}^tAA) = \det({}^tA) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2.$$

Donc

$$\det(\vec{f}) = \det(A) = \pm 1. \quad \square$$

**Définition 34.** On note  $O^+(E)$  l'ensemble des isométries de  $E$  de déterminant  $+1$  et  $O^-(E)$  l'ensemble des isométries de  $E$  de déterminant  $-1$ .

Notez que  $O^+(E)$  est un groupe pour la composition, mais pas  $O^-(E)$ . On dit aussi que  $O^+(E)$  est le groupe spécial orthogonal de  $E$  et on le note aussi  $SO(E)$ .

**Proposition 24.** On suppose que  $V$  et  $W$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , c'est-à-dire tels que  $V \oplus W = E$ . Soit  $\vec{f} \in L(E)$  la symétrie par rapport à  $V$  parallèlement à  $W$ . Alors  $\vec{f}$  est une isométrie si et seulement si  $V$  et  $W$  sont orthogonaux.

*Démonstration.* Supposons  $\vec{f} \in O(E)$  et soient  $\vec{u} \in V$  et  $\vec{v} \in W$ . On a alors  $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$  et  $\vec{f}(\vec{v}) = -\vec{v}$ . Si on applique à ces vecteurs la conservation du produit scalaire :

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{f}(\vec{u}) | \vec{f}(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u} | -\vec{v} \rangle = -\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle;$$

on en déduit  $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0$ . On a donc  $W \subseteq V^\perp$  et l'égalité résulte de l'égalité des dimensions.

Supposons maintenant  $V$  et  $W$  orthogonaux. Il suffit de montrer que  $\vec{f}$  conserve la norme. Soit  $\vec{u} \in E$  que l'on décompose en  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  avec  $\vec{v} \in V$ , et  $\vec{w} \in W$ , de sorte que l'on a  $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{v} - \vec{w}$ . Le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\|\vec{f}(\vec{u})\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2$$

d'où la conclusion. □

4.3.2. *Isométries vectorielles du plan.* On suppose maintenant que  $E$  est de dimension 2 et que  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Proposition 25.** Si  $\vec{f} \in O^+(E)$  alors il existe des réels  $a, b$  vérifiant  $a^2 + b^2 = 1$  tels que la matrice de  $\vec{f}$  dans la base  $\mathcal{B}$  soit

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

**Exercice 12.** Le démontrer.

**Définition 35.** Une isométrie  $\vec{f} \in O^+(E)$  s'appelle une rotation.

**Proposition 26.** Si  $\vec{f} \in O^-(E)$  alors il existe des réels  $a, b$  vérifiant  $a^2 + b^2 = 1$  tels que la matrice de  $\vec{f}$  dans la base  $\mathcal{B}$  soit

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

**Exercice 13.** Le démontrer.

**Proposition 27.** (1) Si  $\vec{f} \in O^-(E)$ , alors  $\vec{f}$  est une réflexion, c'est-à-dire une symétrie par rapport à une droite.

(2) Si  $\vec{f}$  est une rotation elle s'écrit sous la forme  $\vec{f} = \tau_1 \tau_2$  où les  $\tau_i$  sont des réflexions, l'une d'elle pouvant être choisie arbitrairement.

(3) Soient  $\rho$  une rotation et  $\tau$  une réflexion. On a  $\tau \rho \tau^{-1} = \rho^{-1}$ .

(4) Si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux rotations, alors  $\rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_1$ .

**4.4. Espaces affines euclidiens.** On travaille maintenant dans un espace affine  $\mathcal{E}$  dirigé par  $E$ . Étant donné que  $E$  est muni d'un produit scalaire, on dit que  $\mathcal{E}$  est un espace affine Euclidien. On peut alors définir une distance sur  $\mathcal{E}$  par

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

On notera  $AB$  la distance  $d(A, B)$ .

**Proposition 28** (Formule d'Al Kashi). Soit  $ABC$  un triangle (trois points non alignés). Alors,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC} \rangle.$$

**Exercice 14.** Le démontrer.

4.4.1. *Isométries affines.*

**Proposition 29.** Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application affine et  $\vec{f} : E \rightarrow E$  l'application linéaire associée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1)  $\vec{f}$  est une isométrie vectorielle,

(2)  $f$  conserve les distances : pour tous  $A, B \in \mathcal{E}$  on a  $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ .

(3) L'image par  $f$  d'un repère orthonormé est un repère orthonormé.

**Exercice 15.** Le démontrer.

**Définition 36.** Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application affine et  $\vec{f} : E \rightarrow E$  l'application linéaire associée. On dit que  $f$  est une isométrie affine si  $\vec{f}$  est une isométrie vectorielle.

Exemples fondamentaux :

- Les translations sont des isométries. On note  $T_{\vec{v}}$  la translation de vecteur  $\vec{v}$ .

— Soit  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$  un sous-espace affine. La symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{V}$  est une isométrie affine.

**Proposition 30** (Conservation des propriétés). Une isométrie affine conserve l'alignement, les barycentres, les milieux, l'orthogonalité, les distances, les angles (non orientés), transforme projeté orthogonal en projeté orthogonal, etc.

**Théorème 7.** Soit  $f$  une isométrie de  $\mathcal{E}$ . Alors  $f$  s'écrit de manière unique sous la forme  $T_{\vec{u}} \circ G$  où

- (1) le vecteur  $\vec{u}$  appartient à  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{id}_E)$ ,
- (2)  $G$  est une isométrie admettant un point fixe,
- (3)  $G$  et  $T_{\vec{u}}$  commutent.

*Démonstration.* On commence par montrer que  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{id}_E)$  et  $\text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E)$  sont orthogonaux : si  $\vec{u} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{id}_E)$  et  $\vec{v} \in \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E)$ , alors  $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$  et  $\vec{v} = \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w}$ , donc,

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{f}(\vec{w}) \rangle - \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{f}(\vec{u}) | \vec{f}(\vec{w}) \rangle - \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle = 0.$$

Étant donné que la somme des dimensions de  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{id}_E)$  et  $\text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E)$  est égale à la dimension de  $E$  (théorème du rang), on a

$$E = \text{Ker}(\vec{f} - \text{id}_E) \oplus \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E).$$

Montrons maintenant l'existence d'une telle décomposition. Soit  $A$  un point de  $\mathcal{E}$ . On peut donc écrire

$$\overrightarrow{Af(A)} = \vec{u} + \vec{v} \quad \text{avec} \quad \vec{f}(\vec{u}) = \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w}.$$

On pose alors

$$G = T_{-\vec{u}} \circ f \quad \text{et} \quad M = A - \vec{w}.$$

L'application  $G$  est une isométrie. Elle fixe le point  $M$  :

$$G(M) = f(M) - \vec{u} = f(A) - \vec{f}(\vec{w}) - \vec{u} = f(A) - \vec{v} - \vec{w} - \vec{u} = A - \vec{w} = M.$$

Elle commute avec  $f$  car  $T_{\vec{u}}$  commute avec  $f$  étant donné que  $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$  :

$$T_{\vec{u}} \circ f(B) = f(B) + \vec{u} = f(B) + \vec{f}(\vec{u}) = f(B + \vec{u}) = f \circ T_{\vec{u}}(B).$$

Il ne reste plus qu'à montrer l'unicité d'une telle décomposition. Supposons donc que

$$f = T_{\vec{u}_1} \circ G_1 = T_{\vec{u}_2} \circ G_2 \quad \text{avec} \quad G_1(M_1) = M_1 \quad \text{et} \quad G_2(M_2) = M_2.$$

Posons  $\vec{v} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ . Alors

$$G_1 = T_{\vec{v}} \circ G_2 \quad \text{donc} \quad M_1 = G_1(M_1) = G_2(M_1) + \vec{v}.$$

Par conséquent,

$$\vec{v} = \overrightarrow{G_2(M_1)M_1} = \overrightarrow{G_2(M_1)G_2(M_2)} + \overrightarrow{M_2M_1} = (\vec{f} - \text{id}_E)(\overrightarrow{M_1M_2}) \in \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E).$$

De plus,  $f$  et  $T_{\vec{v}}$  commutent, donc  $\vec{v} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{id}_E)$ . Par conséquent  $\vec{v} = \vec{0}$ , ce qui montre que  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$  et donc que  $G_1 = G_2$ .  $\square$

4.4.2. *Isométries affines du plan.* On suppose finalement que  $\mathcal{E}$  est un plan affine (dimension 2). On a alors les résultats suivants.

**Théorème 8.** Les isométries affines du plan sont les suivantes :

- Les déplacements (qui préservent l'orientation) sont les translations et les rotations affines.
- Les anti-déplacements (qui ne préservent pas l'orientation) sont les symétries axiales (symétries orthogonales par rapport aux droites) et les symétries glissées (composées d'une symétrie par rapport à une droite  $D$  et d'une translation de vecteur parallèle à  $D$ ).

**Proposition 31.** On a les décompositions en produit de symétries suivante.

- La translation de vecteur  $\vec{u}$  se décompose en produit de deux symétries d'axes  $D_1$  puis  $D_2$  où  $D_1$  est une droite arbitraire orthogonale à  $\vec{u}$  et où  $D_2$  est l'image de  $D_1$  par la translation de vecteur  $\vec{u}/2$ .
- La rotation de centre  $A$  et d'angle  $\theta$  se décompose en produit de deux symétries d'axes  $D_1$  puis  $D_2$  où  $D_1$  est une droite arbitraire passant par  $A$  et où  $D_2$  est l'image de  $D_1$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\theta/2$ .

Les différents types d'isométries du plan affine sont caractérisés par les propriétés suivantes :

- tous les points sont fixes : l'identité ;
- une droite de points fixes : les symétries axiales ;
- un unique point fixe : les rotations ;
- pas de point fixe :
  - les translations qui ont une infinité de droites stables (les parallèles à la direction de translation),
  - les symétries glissées qui ont une unique droite stable (l'axe de la symétrie).

## Feuille de TD n° 1

**Exercice 1.** Montrer que  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a-b & 0 \\ 2-a-b & a-b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 2.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer que  $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f(a) = b\}$  est un sous-espace affine de l'espace affine  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel de dimension 3, muni d'un repère cartésien  $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ . Soit les points

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

les droites

$$d_1 \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, \quad d_2 \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = -2\mu \\ z = 3 + 5\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R},$$

les plans

$$(P_1) \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda + \mu \\ z = 4 - \lambda - 2\mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (P_2) 2x - y + 3z - 1 = 0, \quad (P_3) x + 2z - 4 = 0.$$

- (1) Donner une équation cartésienne de  $P_1$ .
- (2) Déterminer une représentation paramétrique de  $P_2 \cap P_3$ .
- (3) Donner une équation cartésienne du plan contenant  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- (4) Déterminer l'intersection de  $d_1$  et de  $P_2$ .
- (5) Donner une équation cartésienne du plan  $Q$  contenant  $d_1$  et parallèle à  $d_2$ .
- (6) Déterminer  $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ .
- (7) Déterminer l'intersection de  $P_2$  avec la droite  $(AB)$ .
- (8) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par  $A$ , parallèle à  $P_2$  et coupant  $d_1$ .
- (9) Donner une équation cartésienne du plan passant par  $C$  et contenant  $d_1$ .

**Exercice 4.**

- (1) Montrer que dans  $\mathbb{R}^2$ , deux droites affines soit sont parallèles, soit se coupent en un unique point.
- (2) Que se passe-t-il dans  $\mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 5.** Soit  $A = (2, 1)$  et  $B = (-1, 1)$  deux points de l'espace affine  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer les caractéristiques de la composée des deux homothéties  $h_{A,1/2} \circ h_{B,3}$ .

**Exercice 6.** Dans l'espace affine  $\mathbb{R}^2$  muni du repère cartésien  $(O, e_1, e_2)$ , on considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $2x + y - 2 = 0$ . Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à  $\mathcal{D}$  de direction  $e_1 + e_2$ .

**Exercice 7.** Dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  muni du repère cartésien  $(O; e_1, e_2, e_3)$ , on considère l'application affine définie analytiquement par :

$$f(x, y, z) = (1/2(y + z + 3), 1/2(y + z + 5), 1/2(y + z + 7)).$$

- (1) Montrer que la partie linéaire  $\vec{f}$  est une projection dont on déterminera les caractéristiques. L'application  $f$  est-elle une projection ?
- (2) Soit  $\tau$  la translation de vecteur  $(3, 3, 3)$ . Montrer que  $f = \pi \circ \tau = \tau \circ \pi$ , où  $\pi$  est une projection affine à déterminer.

**Exercice 8.** Soit  $f$  l'application affine du plan qui envoie respectivement les points  $A = (1, 0)$ ,  $B = (2, -1)$ ,  $C = (1, 1)$  sur les points  $A' = (1, -1)$ ,  $B' = (-1, -3)$  et  $C' = (3, -1)$ . Identifier  $f$ .

---

### Exercices supplémentaires

---

**Exercice 9.** Montrer que  $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1\}$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . En déterminer un point et la direction.

**Exercice 10.** *Identité du parallélogramme.* Un parallélogramme est un quadrilatère  $(A, B, C, D)$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1)  $(A, B, C, D)$  est un parallélogramme ;
- (2)  $(A, D, C, B)$  est un parallélogramme ;
- (3) les diagonales  $[AC]$  et  $[BD]$  se coupent en leur milieu.

**Exercice 11.**

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{E}$ , on considère le plan  $H$  d'équation  $x + y + z = 0$  et la droite  $D$  engendrée par  $e_1 + e_2$ . Posons  $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 - e_2$  et  $v_3 = e_1 - e_3$

- (1) (a) Montrer que  $H$  et  $D$  sont deux sous-espaces supplémentaires.  
 (b) En déduire que  $\{v_1, v_2, v_3\} = \mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
 (c) Donner la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{E}$  à la base  $\mathcal{B}$  et calculer son inverse  $P^{-1}$ .
- (2) (a) Considérer la projection  $\pi$  sur le plan  $H$  de direction  $D$ . Donner la matrice de  $\pi$  dans la base  $\mathcal{B}$ , puis dans la base  $\mathcal{E}$ .  
 Soit  $H'$  le plan engendré par  $e_2$  et  $v_3$  et  $D'$  la droite vectorielle engendrée par  $v_2$ . Soit  $\pi'$  la projection sur  $H'$  de direction  $D'$ .  
 (b) Calculer  $\pi'(e_1)$  et  $\pi'(v_1)$ .  
 (c) Donner la matrice de  $\pi'$  et de  $f = \pi' \circ \pi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
 (d) Donner le rang de  $f$  et déterminer  $\text{Ker} f$  et  $\text{Im} f$ .  
 (e) Trouver deux sous-espaces vectoriels  $K$  et  $L$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $f$  soit la projection sur  $K$  de direction  $L$ .

**Exercice 12.** On considère une translation  $\tau$  et une homothétie  $h$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$ . En étudiant la partie linéaire et l'ensemble des points fixes, identifier les applications  $f_1 = \tau \circ h \circ \tau^{-1}$ ,  $f_2 = h^{-1} \circ \tau \circ h$  et  $f_3 = \tau \circ h \circ \tau$ .

**Exercice 13.** Soit  $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par la formule

$$s(x, y, z) = (-2y + z - 2, -x - y + z - 2, -x - 2y + 2z - 2).$$

Déterminer la nature de cette application affine ainsi que ses caractéristiques.

**Exercice 14.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels. Supposons que  $E = F \oplus G$ , On note  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  l'application définie par  $p(u) = u_F$  pour tout  $u = u_F + u_G \in E$ .

- 1) Vérifier que  $p$  est une application linéaire.

- 2) Montrer que  $p \circ p = p$ .
- 3) Quel est le noyau de  $p$ ? Son image? La projection  $p$  est-elle injective? surjective?
- 4) Vérifiez que l'application  $q$  telle que  $p + q = \text{Id}_E$ , est aussi une projection. Quels sont ses éléments caractéristiques (image, noyau)?
- 5) Soit  $p$  un endomorphisme tel que  $p \circ p = p$ . Montrer que  $p$  est un projecteur. (Il n'est pas nécessaire de supposer  $E$  de dimension finie).
- 6) Soit  $s$  un endomorphisme tel que  $s \circ s = \text{Id}$ . Montrer que  $s$  est une symétrie vectorielle. (On pourra introduire l'endomorphisme  $p := 1/2(s + \text{Id})$ ). Déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 15.** Soit  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application affine définie par la formule

$$p(x, y) = (2/3x + 1/3y + 2, 2/3x + 1/3y - 4).$$

- (1) Montrer que  $p^2 = p$
- (2) Déterminer  $p$  géométriquement (points fixes, etc...).



## Feuille de TD n° 2

---

**Barycentres**


---

**Exercice 1.** Existe-t-il dans le plan affine trois points  $A, B, C$  tels que  $\text{Bar}((A, 1), (B, 1), (C, 1)) = \text{Bar}((A, 2), (B, 0), (C, 2))$  ?

**Exercice 2.** Soit  $\{(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_r, m_r)\}$  une famille de points pondérés de  $\mathbb{R}^2$  avec  $A_i = (x_i, y_i)$  et  $M = \sum m_i \neq 0$ . Montrer que le barycentre de la famille  $\{(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_r, m_r)\}$  est le point  $(x, y)$  défini par

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sum m_i y_i}{M}.$$

**Exercice 3.** Montrer que les triangles  $ABC$  et  $PQR$  ont même isobarycentre si et seulement si on a  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \vec{0}$ .

**Exercice 4.** Soit  $ABC$  un triangle. En considérant son isobarycentre  $G = \text{Bar}((A, 1), (B, 1), (C, 1))$ , montrer que les trois médianes du triangle  $ABC$  sont concourantes.

**Exercice 5.** Dans le plan affine  $\mathbb{R}^2$ , on considère les trois points  $A = (3; 1)$ ,  $B = (-1; 2)$  et  $C = (0; -1)$ .

- (1) Montrer que  $(A, B, C)$  est un repère affine de  $\mathbb{R}^2$ .
- (2) Déterminer les points  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}^2$  dont les coordonnées barycentriques dans le repère  $(A, B, C)$  sont respectivement  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ .
- (3) Quelles sont les coordonnées barycentriques dans  $(A, B, C)$  du point  $R$  de  $\mathbb{R}^2$  dont les coordonnées cartésiennes dans  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  sont  $(2; 1)$  ?
- (4) Donner les coordonnées barycentriques dans  $(A, B, C)$  de  $G = \text{Bar}((P, 1), (Q, 2), (R, 5))$ .

**Exercice 6.** Soient  $A, B, C, D$  quatre points non coplanaires d'un espace affine  $\mathcal{E}$  et  $G$  leur isobarycentre. Soient  $I, J, K, I', J', K'$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[AC]$ ,  $[AD]$ ,  $[CD]$ ,  $[BD]$  et  $[BC]$ .

- (1) Montrer que les droites  $(II')$ ,  $(JJ')$  et  $(KK')$  sont concourantes en  $G$  et que  $G$  est le milieu des segments  $[II']$ ,  $[JJ']$  et  $[KK']$ .
- (2) Que dire des droites joignant un sommet du tétraèdre  $ABCD$  à l'isobarycentre de la face opposée à ce sommet ?

**Exercice 7.** Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine muni d'un repère affine  $(A, B, C)$ . Soit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les coordonnées barycentriques d'un point  $M$  dans ce repère. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que :

- (1) le point  $M$  appartient à la droite  $(AB)$
- (2) le point  $M$  appartient à la médiane issue de  $B$  du triangle  $ABC$ .
- (3) le point  $M$  soit sur la parallèle à  $(BC)$  passant par le milieu du segment  $[A, B]$  (indication : théorème de Thalès).

**Exercice 8.** On se place dans l'espace affine  $\mathbb{R}^2$  muni du repère canonique. Considérons les points suivants :

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (2, 1) \quad \text{et} \quad D = (0, 1).$$

- (1) Discuter l'existence d'une application affine  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que
 
$$f(A) = A, \quad f(B) = D, \quad f(C) = C \quad \text{et} \quad f(D) = B.$$
- (2) Si une telle application existe, calculer  $f(\text{Bar}(A, 1/4), (B, 1/4), (C, 1/4), (D, 1/4))$ .
- (3) Discuter l'existence d'une application affine  $f$  telle que

$$f(A) = A, \quad f(B) = D, \quad f(C) = C \quad \text{et} \quad f(D) = \text{Bar}((A, 1/2), (B, 1/2)).$$

**Exercice 9.** Soit  $A, B, C, D$  quatre points d'un plan affine  $E$  trois à trois non alignés. Supposons qu'il existe une transformation affine  $f$  de  $E$  telle que  $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D$  et  $f(D) = A$ .

- (1) Montrer que l'isobarycentre  $O$  de  $A, B, C, D$  est l'unique point fixe de  $f$ .
- (2) En déduire que  $O$  est l'intersection des droites  $(AC)$  et  $(BD)$ .
- (3) Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme.
- (4) Donner la matrice de  $\vec{f}$  dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

**Exercice 10.** Soit  $E$  un espace affine de dimension 3 et  $A, B, C, D$  un repère affine de  $E$ .

- (1) Donner l'équation du plan  $(ABC)$  en coordonnées barycentriques.
- (2) Donner l'équation du plan parallèle au plan  $(ABC)$  passant par  $D$  en coordonnées barycentriques.
- (3) Soit  $h$  l'homothétie de rapport  $-1/3$  et de centre  $O$ , l'isobarycentre de  $A, B, C, D$ . Montrer que  $h(D)$  appartient au plan  $(ABC)$  et que c'est l'isobarycentre de  $A, B, C$ .

**Exercice 11. Théorème de Ménélaüs**

Soit  $ABC$  un triangle du plan affine et  $A', B', C'$  trois points appartenant respectivement aux droites  $(BC), (CA), (AB)$  et distincts des sommets  $A, B, C$ . On souhaite montrer que  $A', B', C'$  sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$$

- (1) Déterminer les coordonnées barycentriques de  $A$  et  $B$  dans le repère affine  $(A', B', C)$ .

(2) En déduire les coordonnées barycentriques de  $C'$  dans le repère affine  $(A', B', C)$ .

(3) Conclure.

**Exercice 12. Théorème de Ceva**

Soit  $ABC$  un triangle du plan affine et  $A', B', C'$  trois points appartenant respectivement aux droites  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$  et distincts des sommets  $A, B, C$ . On veut montrer que les trois droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

(1) On suppose que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont parallèles. En utilisant le théorème de Thalès, montrer que

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}}$$

et en déduire la relation (2).

(2) On suppose que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes en un point  $K$ . En appliquant le théorème de Ménélaüs dans les triangles  $AA'C$  et  $ABA'$  montrer que :

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{KA}}{\overline{KA'}} = +1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{KA'}}{\overline{KA}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1,$$

puis en déduire la relation (2).

(3) On suppose que la relation (2) est vérifiée, que les droites  $(AA')$  et  $(BB')$  sont sécantes en un point  $K$  et on désigne par  $C''$  le point d'intersection de  $(CK)$  avec  $(AB)$ . En utilisant la question précédente, montrer que  $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1$  et en déduire que

$$\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}, \quad \text{puis que } C'' = C'.$$

(4) Conclure.

## Feuille de TD n° 3

On suppose que  $E$  est un espace euclidien muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et d'une base orthonormée  $\mathcal{B}$ . On suppose que  $\mathcal{E}$  est un espace affine dirigé par  $E$  et que  $(O; \mathcal{B})$  est un repère orthonormé de  $\mathcal{E}$ .

## Angles

Rappel : étant donnés deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ , on a :

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \quad \text{et} \quad \det_{\mathcal{B}}(\vec{u} | \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta.$$

**Exercice 1.** On suppose que  $E$  est de dimension 2. pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on considère les vecteurs  $\vec{u}_i$  et  $\vec{v}_i$  dont les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  sont les suivantes :

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- (1) Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , déterminer  $\|\vec{u}_i\|$ ,  $\|\vec{v}_i\|$ ,  $\langle \vec{u}_i | \vec{v}_i \rangle$  et  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_i, \vec{v}_i)$ .
- (2) Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on note  $\theta_i$  le représentant dans  $]-\pi, \pi]$  de l'angle orienté entre les vecteurs  $\vec{u}_i$  et  $\vec{v}_i$ . Déterminer  $\cos(\theta_i)$  et  $\sin(\theta_i)$ . En déduire  $\theta_i$ .

**Exercice 2.** On suppose que  $E$  est de dimension 3 et que  $A, B, C \in \mathcal{E}$  sont trois points donnés par leurs coordonnées dans le repère  $(O; \mathcal{B})$  :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer  $\langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC} \rangle$ ,  $\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{BA} \rangle$  et  $\langle \overrightarrow{CA} | \overrightarrow{CB} \rangle$ .
- (2) Déterminer les mesures en degrés des angles non orientés  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$  et  $\widehat{CAB}$ .
- (3) Vérifier que la somme vaut  $180^\circ$ .

**Exercice 3.** Considérons un triangle  $ABC$  contenu dans l'espace affine  $\mathcal{E}$  et les angles non orientés

$$\alpha = \widehat{CAB}, \quad \beta = \widehat{ABC} \in ]0, \pi[ \quad \text{et} \quad \gamma = \widehat{BCA} \in ]0, \pi[.$$

On souhaite démontrer que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

- (1) On commence par montrer que  $ABC$  a au plus un angle obtus.
  - (a) Supposons que  $\langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC} \rangle < 0$ . En utilisant la relation de Chasles pour décomposer  $\overrightarrow{BC}$ , montrer que  $\langle \overrightarrow{BA} | \overrightarrow{BC} \rangle > 0$  et que  $\langle \overrightarrow{CA} | \overrightarrow{CB} \rangle > 0$ .
  - (b) Conclure.

On suppose désormais que  $\beta \leq \pi/2$  et que  $\gamma \leq \pi/2$ .

- (2) Dans cette question, on établit l'égalité :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cos(\beta + \gamma)$ .
- (a) En considérant  $\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \rangle$ , établir que  $BC = AB \cos \beta + AC \cos \gamma$ .
- (b) On oriente le plan  $(ABC)$  par la base  $\mathcal{B} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ . En considérant  $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ , établir que  $0 = AB \sin \beta - AC \sin \gamma$ .
- (c) En utilisant la formule de trigonométrie  $\cos(\beta + \gamma) = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma$ , montrer l'égalité requise.
- (3) Démontrer la formule d'Al Kashi :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha$ .
- (4) En déduire que  $\cos(\beta + \gamma) = -\cos \alpha$  puis conclure que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

### Isométries vectorielles

**Exercice 4.** Dans cet exercice,  $E = \mathbb{R}^2$  est muni du produit scalaire usuel. On considère les endomorphismes de  $E$  définis par :

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y/2 \\ x/2 + y \end{pmatrix}, \quad f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y \\ -\sqrt{3}x + y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

- (1) Dans chaque cas, déterminer la matrice de l'application dans la base canonique.
- (2) Lorsque la matrice est orthogonale,
- (a) Calculer son déterminant.
- (b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés.
- (c) Caractériser les endomorphismes correspondants.

**Exercice 5.** On suppose maintenant que  $E$  est un plan euclidien (de dimension 2), orienté par la base orthonormée  $\mathcal{B}$ , et que  $f : E \rightarrow E$  est une isométrie.

- (1) Si  $\det(f) = +1$ ,  $f$  est une rotation ; on rappelle qu'il existe  $\theta \in [0, \pi]$  tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de coordonnées  $(x; y)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

- (a) Montrer que  $\langle \vec{u} | f(\vec{u}) \rangle = (x^2 + y^2) \cos \theta$ .
- (b) Montrer que  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u} | f(\vec{u})) = (x^2 + y^2) \sin \theta$ .
- (c) En déduire que l'angle orienté entre  $\vec{u}$  et  $f(\vec{u})$  ne dépend pas de  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et déterminer cet angle.

- (2) Si  $\det(f) = -1$ ,  $f$  est une symétrie orthogonale; on rappelle qu'il existe  $\theta \in [0, \pi]$  tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in E$  les vecteurs de coordonnées respectives  $(\cos(\theta/2); \sin(\theta/2))$  et  $(-\sin(\theta/2); \cos(\theta/2))$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

- (a) Montrer que  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$  est une base orthonormée de  $E$ .
- (b) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- (c) En déduire l'axe de symétrie de  $f$ .

### Isométries affines

Dans toute cette partie  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$  est le plan affine euclidien muni du produit scalaire usuel.

**Exercice 6.** Déterminer l'expression des isométries de  $\mathcal{E}$  suivantes :

- (1) la translation de vecteur  $\vec{u} = (3; -2)$ ;
- (2) la rotation de centre  $(2; 1)$  et d'angle  $\pi/4$ ;
- (3) la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation  $2x - 5y = 6$ ;
- (4) la symétrie orthogonale glissée d'axe la droite d'équation  $x - 2y = 3$  et de vecteur  $\vec{u} = (2; 1)$ .

**Exercice 7.** On considère les applications affines de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  suivantes :

$$F_1(x, y) = \left( -\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 4, \frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} + 2 \right) \quad \text{et} \quad F_2(x, y) = \left( -\frac{5x}{13} + \frac{12y}{13}, \frac{12x}{13} + \frac{5y}{13} + 13 \right).$$

- (1) Montrer que  $F_1$  et  $F_2$  sont des isométries affines.
- (2) Déterminer l'ensemble des points fixes de  $F_1$  et de  $F_2$ .
- (3) Caractériser ces isométries.