Problème de Sturm-Liouville

Avertissement : ce qui suit est une approche élémentaire du *problème de Sturm-Liouville*, sous forme d'un problème corrigé.

On se propose de démontrer que, pour toute fonction $q \in C^0([0,1])$ à valeurs réelles, il existe une base hilbertienne $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ composée de fonctions C^2 et une suite de réels $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant,

$$e_j''(x) + q(x)e_j(x) + \nu_j e_j(x) = 0, \qquad x \in]0,1[, \tag{0.1}$$

et les conditions aux limites

$$e_j(0) = e_j(1) = 0.$$

1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Montrer que si $u \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ vérifie

$$u'' + zu = 0 \qquad \text{sur} \quad]0,1[\qquad \text{et} \quad u(0) = u(1) = 0,$$

alors $u = 0$.

Solution. En multipliant l'équation différentielle par $\overline{u}$ et en intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$0 = \int_0^1 u''\overline{u} + z\int_0^1 u\overline{u} = -\int_0^1 |u'|^2 + z\int |u|^2$$

en intégrant par partie. Noter que le fait que $u \in C^2(]0,1[)$ ne pose pas de problème en 0 et 1 (on peut intégrer entre ϵ et $1-\epsilon$ puis laisser $\epsilon \to 0$, et observer que u' est bornée au voisinage de 0 et 1 car $u'' = -zu$ l'est). Ainsi

$$i\mathrm{Im}(z)||u||_{L^2}^2 = ||u'||_{L^2}^2 - \mathrm{Re}(z)||u||_{L^2}^2,$$

donc si $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, on doit avoir $||u||_{L^2} = 0$ (réel = imaginaire) et si $\mathrm{Im}(z) = 0$ alors $\mathrm{Re}(z) < 0$ ce qui impose encore que $||u||_{L^2} = 0$ (positif = 0). $\square$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\sin(\lambda) \neq 0$ et tous $x, y \in [0,1]$, on définit

$$K_\lambda(x,y) = \frac{\sin\lambda(x-y)}{\lambda}\chi_{[0,x]}(y) - \frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda}\frac{\sin\lambda(1-y)}{\lambda}.$$

2) Montrer que, pour $f \in L^2([0,1])$ et $\sin\lambda \neq 0$,

$$R_0(\lambda)f(x) := \int_{[0,1]} K_\lambda(x,y)f(y)dy,$$

est bien définie et que $R_0(\lambda)$ définit ainsi une application linéaire continue sur $L^2([0,1])$.

Solution. On peut invoquer le fait que $K_\lambda \in L^2([0,1]\times[0,1])$ ce qui implique que $R_0(\lambda)$ est une application linéaire continue (et même de Hilbert-Schmidt). Sinon, on peut vérifier à la main que $R_0(\lambda)f(x)$ est une fonction continue de x ce qui montre que $R_0(\lambda)f$ est mesurable. Puis

$$||R_0(\lambda)f||_{L^2} \leq ||R_0(\lambda)f||_{L^\infty} \leq ||K_\lambda||_\infty ||f||_{L^2},$$

montre que $R_0(\lambda)f \in L^2$ et que $R_0(\lambda)$ est (linéaire) continue. □

3) Montrer que, pour toute $f \in C([0,1])$,

$$R_0(\lambda)f \in C^2(]0,1[) \cap C^0([0,1]),$$

et vérifie

$$u'' + \lambda^2 u = f \qquad \text{sur } \;]0,1[\qquad \text{et} \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Solution. Clairement $x \mapsto \sin\lambda x \int_{[0,1]} \sin\lambda(1-y)f(y)dy$ est une fonction C^∞ de x (sur $\mathbb{R}$). On étudie donc seulement la contribution de

$$v(x) := \int_{[0,1]} \sin\lambda(x-y)\chi_{[0,x]}(y)f(y)dy = \int_0^x \sin\lambda(x-y)f(y)dy.$$

On a

$$v(x+h) - v(x) = \int_0^x \left(\sin\lambda(x+h-y) - \sin\lambda(x-y)\right) f(y)dy + \int_x^{x+h} \sin\lambda(x+h-y)f(y)dy$$

où le second terme est $\mathcal{O}(h)$ et le premier tend vers 0 avec h par les théorèmes usuels. Ainsi, $v \in C^0([0,1])$. En divisant cette expression par h, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} &= \int_0^x \frac{\sin\lambda(x+h-y) - \sin\lambda(x-y)}{h} f(y)dy + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \sin\lambda(x-y)f(y)dy \\ &\quad + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left(\sin\lambda(x+h-y) - \sin\lambda(x-y)\right) f(y)dy.\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers $\lambda \int_0^x \cos\lambda(x-y)f(y)dy$ par les théorèmes usuels et le deuxième vers $\sin\lambda(x-y)f(y)_{|y=x} = 0$. Quant au dernier, c'est un $\mathcal{O}(h)$ car $\sin\lambda(x+h-y) - \sin\lambda(x-y) = \mathcal{O}(h)$ (uniformément par rapport à $y \in [0,1]$) par théorème des accroissements finis. Ainsi

$$v'(x) = \lambda \int_0^x \cos\lambda(x-y)f(y)dy,$$

et, comme précédemment, c'est une fonction continue de x. Un raisonnement analogue montre que

$$v''(x) = \lambda f(x) - \lambda^2 \int_0^2 \sin\lambda(x-y)f(y)dy = \lambda f(x) - \lambda^2 v(x),$$

qui est là encore continue. Il est ensuite aisé de vérifier que $R_0(\lambda)f$ satisfait l'équation différentielle et les conditions aux bords (ie en 0 et 1). □

4) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$,

$$|||R_0(i\lambda)||| \leq \frac{1}{\lambda^2},$$

où $||| \cdot |||$ désigne la norme d'opérateur associée à la norme usuelle sur $L^2([0,1])$.

Solution. Soit f continue. D'après la question précédente, $u := R_0(i\lambda)f$ vérifie

$$u'' - \lambda^2 u = f.$$

En multipliant cette équation par $\overline{u}$, en intégrant sur $[0,1]$ et intégrant par partie le terme avec u'', on obtient

$$||u'||_{L^2}^2 + \lambda^2 ||u||_{L^2}^2 = -\int f\overline{u} \leq ||u||_{L^2}||f||_{L^2}.$$

Comme le membre de droite est minoré par $\lambda^2||u||_{L^2}^2$, on obtient $\lambda^2||u||_{L^2}^2 \leq ||u||_{L^2}||f||_{L^2}$, ie

$$||R_0(i\lambda)f||_{L^2} \leq \lambda^{-2}||f||_{L^2}.$$

Ceci est vrai pour toute $f \in C^0([0,1])$ et donc, par continuité de $R_0(i\lambda)$ et densité de C^0 dans L^2, vrai aussi pour toute $f \in L^2([0,1])$. □

5) Montrer que, pour tous $\lambda, \mu \in]0, +\infty[$,

$$R_0(i\lambda) - R_0(i\mu) = (\lambda^2 - \mu^2)R_0(i\lambda)R_0(i\mu).$$

En déduire que $R_0(i\lambda)$ et $R_0(i\mu)$ commutent.

Solution. Soit $f \in C^0([0,1])$ et posons

$$\begin{aligned} u &= R_0(i\lambda)f, \\ v &= R_0(i\mu)f + (\lambda^2 - \mu^2)R_0(i\lambda)R_0(i\mu)f = v_1 + v_2. \end{aligned}$$

D'après la question **3)**, ces fonctions sont dans $C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$, s'annulent en 0 et 1 et vérifient les équations différentielles

$$\begin{aligned} u'' - \lambda^2 u &= f, \\ v_1'' - \mu^2 v_1 &= f, \\ v_2'' - \lambda^2 v_2 &= (\lambda^2 - \mu^2)R_0(i\mu)f = (\lambda^2 - \mu^2)v_1. \end{aligned}$$

On en déduit facilement que $(u-v)'' - \lambda^2(u-v) = 0$ (et $(u-v)(0) = (u-v)(1) = 0$) et la question **1)** montre que $u = v$. Comme ceci est vrai pour toute fonction continue f, c'est vrai par densité pour toute fonction L^2, ce qui montre l'identité demandée. On en déduit (si $\lambda \neq \mu$) que

$$R_0(i\lambda)R_0(i\mu) = \frac{R_0(i\lambda) - R_0(i\mu)}{\lambda^2 - \mu^2},$$

où le membre de droite est inchangé si on échange les rôles de λ et μ, ce qui donne la commutativité. □

6) Montrer que, pour toute $f \in C_0^2(]0,1[)$ (fonction C^2 à support compact contenu dans $]0,1[$) et tout $\mu > 0$, on a

$$R_0(i\mu)f'' = \mu^2 R_0(i\mu)f + f.$$

En déduire que, pour toute $f \in L^2([0,1])$,

$$(i\mu)^2 R_0(i\mu)f \to f, \qquad \mu \to +\infty.$$

Solution. Si $f \in C_0^2(]0,1[)$ elle est C^2 sur $\mathbb{R}$ donc on peut sans problème faire des intégrations par parties dans

$$R_0(i\mu)f''(x) = \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-y)}{\lambda} f''(y)dy - \frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda}\int_0^1 \frac{\sin\lambda(1-y)}{\lambda} f''(y)dy.$$

Comme f et toutes ses dérivées sont nulles en 0 et 1, les termes de bords sont tous nuls sauf peut-être ceux qui proviennent de la borne supérieure x de la première intégrale. Ainsi, on obtient

$$\int_0^x \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\sin\lambda(x-y)}{\lambda}\right) f(y)dy - \frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda}\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\sin\lambda(1-y)}{\lambda}\right) f(y)dy + [\cos\lambda(x-y)f(y)]_{y=0}^{y=x}$$

qui donne l'identité cherchée.

Mais alors, si $f \in C_0^2(]0,1[)$, on a

$$f - (i\mu)^2 R_0(i\mu)f = R_0(i\mu)f'' \to 0, \qquad \mu \to +\infty,$$

d'après la question **4)**. On obtient donc le résultat si $f \in C_0^2(]0,1[)$. On va l'obtenir pour $f \in L^2([0,1])$ par un argument de densité. Fixons $\epsilon > 0$. Par densité de $C_0^\infty(]0,1[)$ dans $L^2([0,1])$, on peut trouver $\tilde{f} \in C_0^2(]0,1[)$ telle que

$$||f - \tilde{f}||_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

En écrivant

$$f - (i\mu)^2 R_0(i\mu)f = (f - \tilde{f}) + \left(\tilde{f} - (i\mu)^2 R_0(i\mu)\tilde{f}\right) + (i\mu)^2 R_0(i\mu)(\tilde{f} - f)$$

et en utilisant que $|||(i\mu)^2 R_0(i\mu)||| \leq 1$, d'après la question **4)**, on obtient

$$||f - (i\mu)^2 R_0(i\mu)f||_{L^2} \leq \frac{2\epsilon}{3} + ||\tilde{f} - (i\mu)^2 R_0(i\mu)\tilde{f}||_{L^2},$$

dont le dernier terme est plus petit que $\epsilon/3$ pour tout μ assez grand. D'où le résultat. □

7) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $R_0(i\lambda)$ est injectif.

Solution. Soit $f \in L^2([0,1])$ telle que $u = R_0(i\lambda)f = 0$. Si on savait que f était continue, on pourrait utiliser **3)** pour conclure que $f = u'' - \lambda^2 u = 0$. Mais f est seulement L^2 à priori ! On procède donc autrement. D'après la question **5)**, et en utilisant le fait que $R_0(i\lambda)$ et $R_0(i\mu)$ commutent, on voit que

$$R_0(i\mu)f = R_0(i\lambda)f - (\lambda^2 - \mu^2)R_0(i\mu)R_0(i\lambda)f = 0,$$

pour tout $\mu > 0$. En utilisant la question **6)**, on en déduit le résultat en multipliant l'égalité ci-dessus par μ^2 et en faisant tendre μ vers $+\infty$. □

8) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $R_0(i\lambda)$ est auto-adjoint.

Solution. En utilisant le Théorème de Fubini, on voit que pour tous $f, g \in L^2([0,1])$

$$\int_0^1 \overline{g(x)} R_0(i\lambda)f(x)dx = \int_0^1\int_0^1 \overline{g(x)} K_{i\lambda}(x,y)f(y)dydx = \int_0^1 \overline{\left(\int_0^1 \overline{K_{i\lambda}(y,x)}g(y)dy\right)} f(x)dx$$

ce qui montre que $R_0(i\lambda)^*$ est l'opérateur de noyau $\overline{K_{i\lambda}(y,x)}$. Il suffit donc de montrer que

$$\overline{K_{i\lambda}(y,x)} = K_{i\lambda}(x,y),$$

pour presque tout $(x,y) \in [0,1]^2$. Comme $\sin(iX) = i\mathrm{sh}(X)$, et

$$\chi_{[0,y]}(x) = 1 - \chi_{]y,1]}(x) = 1 - \chi_{[0,x[}(y),$$

on obtient

$$\overline{K_{i\lambda}(y,x)} = \frac{\mathrm{sh}\lambda(x-y)}{\lambda}(\chi_{[0,x[}(y) - 1) - \frac{\mathrm{sh}\lambda y}{\mathrm{sh}\lambda}\frac{\mathrm{sh}\lambda(1-x)}{\lambda}.$$

Ainsi, comme $\chi_{[0,x[}(y) = \chi_{[0,x]}(y)$ pour presque tout (x,y) (il y a égalité sauf sur la diagonale qui est de mesure nulle), il suffit de montrer que

$$-\frac{\mathrm{sh}\lambda(x-y)}{\lambda} - \frac{\mathrm{sh}\lambda y}{\mathrm{sh}\lambda}\frac{\mathrm{sh}\lambda(1-x)}{\lambda} = -\frac{\mathrm{sh}\lambda x}{\mathrm{sh}\lambda}\frac{\mathrm{sh}\lambda(1-y)}{\lambda},$$

ie

$$\mathrm{sh}\lambda\ \mathrm{sh}\lambda(x-y) + \mathrm{sh}\lambda y\ \mathrm{sh}\lambda(1-x) = \mathrm{sh}\lambda x\ \mathrm{sh}\lambda(1-y),$$

ce qui se vérifie aisément, soit en développant les sh en exponentielles, soit en remarquant que les deux membres de cette égalité satisfont $u'' - \lambda^2 u = 0$ (par rapport à x par exemple), et coïncident en $x = 1$ et $x = 0$, et en utilisant la question **1)**. □

On fixe maintenant $q \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et on note par Q l'opérateur de multiplication par q, ie

$$(Qu)(x) = q(x)u(x), \qquad x \in [0,1].$$

9) Montrer que, pour tout $\lambda > ||q||_\infty^{1/2}$,

$$R(i\lambda) := \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k R_0(i\lambda)\left(QR_0(i\lambda)\right)^k$$

définit un opérateur auto-adjoint, compact et injectif.

Solution. On remarque d'abord que la série est convergente (dans l'espace de Banach des applications linéaires continues sur $L^2([0,1])$) car $|||QR_0(i\lambda)||| < 1$ d'après la question **4)** et le fait que $|||Q||| \le ||q||_\infty$ car

$$||Qf||_{L^2} \le ||q||_\infty ||f||_{L^2}.$$

En fait, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(QR_0(i\lambda)\right)^k = \left(1 + QR_0(i\lambda)\right)^{-1},$$

qui est inversible, et en particulier injectif. Ainsi,

$$R(i\lambda) = R_0(i\lambda)\left(1 + QR_0(i\lambda)\right)^{-1}$$

est bien définie et est clairement une application linéaire continue, injective en utilisant la question **7)**. La compacité est une conséquence du fait que $R_0(i\lambda)$ est compact car les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont compacts et que "compact ∘ continu = compact". Prouvons le caractère auto-adjoint. Le fait que $|||A^*||| = |||A|||$ et que $A \mapsto A^*$ soit anti-linéaire, montrent que $A \mapsto A^*$ est continue sur l'espace des applications linéaires continues. Cela permet de permuter $\sum$ et passage à l'adjoint dans les séries convergentes (ie $(\sum_k A_k)^* = \sum_k A_k^*$). Mais alors, en remarquant que

$$\begin{aligned} R(i\lambda) &= R_0(i\lambda) + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k R_0(i\lambda)\left(QR_0(i\lambda)\right)^k \\ &= R_0(i\lambda) + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(R_0(i\lambda)Q\right)^k R_0(i\lambda) \end{aligned}$$

et que $Q^* = Q$ car q est réel, on en déduit

$$R(i\lambda)^* = R_0(i\lambda)^* + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k R_0(i\lambda)^* \left(Q^* R_0(i\lambda)^*\right)^k = R(i\lambda),$$

en utilisant aussi que $(AB)^* = B^* A^*$. $\square$

10) Montrer que, pour toute $f \in C^0([0,1])$ et tout $\lambda > ||q||_\infty^{1/2}$,

$$R(i\lambda)f \in C^2(]0,1[) \cap C^0([0,1]),$$

et vérifie

$$u''(x) + q(x)u(x) - \lambda^2 u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \qquad \text{et} \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Solution. Comme dans la solution de **2)**, on remarque que $R_0(i\lambda)g \in C^0([0,1])$ pour toute $g \in L^2([0,1])$. Ainsi, comme

$$R(i\lambda)f = R_0(i\lambda)\left(\sum_{k\geq 0}(-1)^k (QR_0(i\lambda))^k f\right),$$

où la parenthèse définit un élément de L^2, il est clair que $R(i\lambda)f \in C^0([0,1])$. Ensuite, on remarque que

$$R(i\lambda) = R_0(i\lambda) - R_0(i\lambda)QR(i\lambda), \tag{0.2}$$

ainsi comme $QR(i\lambda)f \in C^0([0,1])$, la question **3)** montre que $R_0(i\lambda)f \in C^2(]0,1[)$ et s'annule en 0 et 1. En posant $u = R(i\lambda)f$, on tire de la question **3)** que

$$v_1 := R_0(i\lambda)f \qquad \text{et} \qquad v_2 := R_0(i\lambda)QR(i\lambda)f = R_0(i\lambda)Qu,$$

vérifient

$$v_1''(x) - \lambda^2 v_1(x) = f(x) \qquad v_2''(x) - \lambda^2 v_2(x) = q(x)u(x),$$

ce qui conduit aisément à l'équation différentielle satisfaite par u puisque $u = v_1 - v_2$ d'après (0.2). $\square$

11) Conclure.

Solution. Comme $R(i\lambda)$ est un opérateur auto-adjoint compact, il existe une base hilbertienne $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ constituée de fonctions propres, et telles que

$$R(i\lambda)e_j = \mu_j e_j,$$

les μ_j étant les valeurs propres associées. On rappelle qu'elles sont réelles et que $\mu_j \to 0$ quand $j \to \infty$. Comme $R(i\lambda)$ est injectif, toutes ces valeurs propres sont non nulles. Ainsi, chaque e_j vérifie

$$e_j = \frac{1}{\mu_j} R(i\lambda)e_j.$$

Cela montre, en utilisant la preuve de la question précédente, que e_j est de la forme $R_0(i\lambda)f_j$ avec $f_j \in C^0([0,1])$. Mais alors, comme e_j est continue, $R(i\lambda)e_j$ est dans $C^2(]0,1[)$ et on a

$$e_j''(x) + q(x)e_j(x) - \lambda^2 e_j(x) = \frac{1}{\mu_j} e_j(x), \qquad e_j(0) = e_j(1) = 0,$$

d'après la question précédente. Cela nous donne (0.1) avec

$$\nu_j = -\lambda^2 - \frac{1}{\mu_j}.$$

$\square$