Monodromie des opérateurs non-autoadjoints : Monodromie spectrale

Phan Quang Sang

IRMAR- Université de Rennes 1

4ème Rencontre du GDR Dynamique Quantique
Toulouse, le 7 février 2012

Table of contents

Motivation

Notre travail s'inscrit dans le cadre de la théorie spectrale en limite semi-classique. Il a pour objectif de comprendre la structure du spectre de certaines classes d'opérateurs non auto-adjoints.

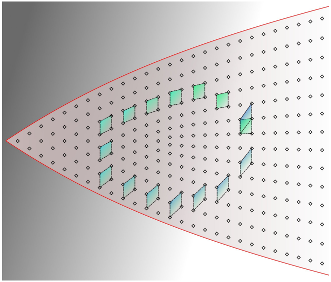
C'est un problème quantique que nous traiterons avec l'aide des techniques semi-classiques, microlocales en combinant avec la théorie spectrale générale et la théorie des opérateurs pseudo-différentiels.

Comme une "nécessité philosophique" de l'analyse semi-classique, nous ferons aussi le lien avec des résultats classiques qui éclairent le problème quantique initial.

Par San Vu-Ngoc (CMP-1999), la monodromie quantique est définie pour le réseau spectre conjoint (discret) d'un système intégrable quantique.

Un système quantique intégrable se compose de n opérateurs h-pseudo-différentiels autoadjoints qui commutent.

Image de la monodromie quantique par San Vu Ngoc :



Nous se proposons une question mystérieuse :
peut-on définir (et détecter) la monodromie pour le spectre d'un seul opérateur h-pseudo-différentiel (de Weyl) ?
La question n'est pas connue dans le cas autoadjoint : son spectre est 1-D !
Cependant, il s'avère bien de travailler avec un opérateur non-autoadjoint 2-D.

Nous se proposons une question mystérieuse :
peut-on définir (et détecter) la monodromie pour le spectre d'un seul opérateur h-pseudo-différentiel (de Weyl) ?
La question n'est pas connue dans le cas autoadjoint : son spectre est 1-D !
Cependant, il s'avère bien de travailler avec un opérateur non-autoadjoint 2-D.
Nous allons traiter deux cas suivants :

1. Opérateur normal $A = P_1(h) + iP_2(h)$ avec P_1, P_2 autoadjoints et $[P_1, P_2] = 0$.
2. Une petite perturbation d'un autoadjoint $P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q$ avec les symboles principaux qui satisfont $\{p, q\} = 0$, $h, \varepsilon \to 0$.

Dans cet exposé, X note une variété compacte de dimension n ou $X = \mathbb{R}^n$.
Ici, nous prenons $n = 2$.
Un système quantique intégrable (S.Q.I) = deux opérateurs $(P_1(h), P_2(h))$ h-pseudo-différentiels auto-adjoints (ΨDO) , classiques d'ordre 0 qui commutent sur $L^2(X)$:
$[P_1(h), P_2(h)] = 0$. (Les symboles de Weyl $p_j(h)$ de $P_j(h)$ dans une classe appropriée).

Définition de Spectre conjoint

Le spectre conjoint du S.Q.I $(P_1(h), P_2(h))$ est l'ensemble, noté $\sigma_{conj}(P_1, P_2)$:

$$\sigma_{conj}(P_1, P_2) = \{(E_1(h), E_2(h)) \in \mathbb{R}^2 | \cap_{j=1}^{2} Ker(P_j - E_j(h)) \neq \emptyset\}$$

Supposons que pour $j = 1, 2$,
$p_j(x, \xi; h) = p_0^{(j)}(x, \xi) + hp_1^{(j)}(x, \xi) + h^2 p_2^{(j)}(x, \xi) + \cdots$
Le premier terme de ce développement est appelé le symbole principal de l'opérateur.
La commutativité des P_J implique $\{p_0^{(1)}, p_0^{(2)}\} = 0$ et supposons l'application moment

$$p : T^*X \ni (x, \xi) \mapsto (p_0^{(1)}(x, \xi), p_0^{(2)}(x, \xi)) \in \mathbb{R}^2.$$

soit propre.
Notons U_r l'ensemble des valeurs régulières de p et soit un certain ensemble $U \subset U_r$ avec $\overline{U}$ compact.
Posons $\Sigma(h) = \sigma_{conj}(P_1(h), P_2(h)) \cap U$.
Alors il est bien connu d'un article de Charbonnel(1998) que $\Sigma(h)$ est discret et pour h assez petit il se compose des valeurs propres conjointes simples.

De plus, on a le résultat suivant :

Proposition-[Charbonnel]

$\Sigma(h)$ est un réseau asymptotique affine sur U.

i.e pour toute petite boule $B \subset U$, il existe un symbole inversible d'ordre 0, $f(h) : B \to \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda(h) \in \Sigma \cap B + \mathcal{O}(h^\infty) \Leftrightarrow f(\lambda(h); h) \in h\mathbb{Z}^n + \mathcal{O}(h^\infty).$$

De plus, on a le résultat suivant :

Proposition-[Charbonnel]

$\Sigma(h)$ est un réseau asymptotique affine sur U.

i.e pour toute petite boule $B \subset U$, il existe un symbole inversible d'ordre 0, $f(h) : B \to \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda(h) \in \Sigma \cap B + \mathcal{O}(h^\infty) \Leftrightarrow f(\lambda(h); h) \in h\mathbb{Z}^n + \mathcal{O}(h^\infty).$$

On peut voir $(f(h), B)$ comme une carte locale de $\sum(h)$ sur U.

De plus, on a le résultat suivant :

Proposition-[Charbonnel]

$\Sigma(h)$ est un réseau asymptotique affine sur U.

i.e pour toute petite boule $B \subset U$, il existe un symbole inversible d'ordre 0, $f(h) : B \to \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda(h) \in \Sigma \cap B + \mathcal{O}(h^\infty) \Leftrightarrow f(\lambda(h); h) \in h\mathbb{Z}^n + \mathcal{O}(h^\infty).$$

On peut voir $(f(h), B)$ comme une carte locale de $\sum(h)$ sur U.

Quelles sont les fonctions de transition ?

De plus, on a le résultat suivant :

Proposition-[Charbonnel]

$\Sigma(h)$ est un réseau asymptotique affine sur U.

i.e pour toute petite boule $B \subset U$, il existe un symbole inversible d'ordre 0, $f(h) : B \to \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda(h) \in \Sigma \cap B + \mathcal{O}(h^\infty) \Leftrightarrow f(\lambda(h); h) \in h\mathbb{Z}^n + \mathcal{O}(h^\infty).$$

On peut voir $(f(h), B)$ comme une carte locale de $\sum(h)$ sur U.

Quelles sont les fonctions de transition ?

Les fonctions de transitions sont dans le groupe affine $GA(2, \mathbb{Z})$ par un résultat de Vu-Ngoc San.

Proposition-[S.Vu-Ngoc-1999]

Soient $(f_\alpha(h), B_\alpha)$ et $(f_\beta(h), B_\beta)$ deux cartes locales de $\Sigma(h)$ sur U telles que $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$. Alors il existe une unique application affine $A_{\alpha\beta} \in GA(2, \mathbb{Z})$ telle que

$$\left(\frac{f_\beta(h)}{h}\right) \circ \left(\frac{f_\alpha(h)}{h}\right)^{-1} = A_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Proposition-[S.Vu-Ngoc-1999]

Soient $(f_\alpha(h), B_\alpha)$ et $(f_\beta(h), B_\beta)$ deux cartes locales de $\Sigma(h)$ sur U telles que $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$. Alors il existe une unique application affine $A_{\alpha\beta} \in GA(2, \mathbb{Z})$ telle que

$$\left(\frac{f_\beta(h)}{h}\right) \circ \left(\frac{f_\alpha(h)}{h}\right)^{-1} = A_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Maintenant, supposons que U est couvert par un recouvrement localement fini des cartes locales $\{(f_\alpha(h), B_\alpha)\}$ au sens de Leray. Alors sur chaque $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$, il existe $A_{\alpha\beta} \in GA(n, \mathbb{Z})$. La famille $\{A_{\alpha\beta}\}$ définit un 1-cocycle $\mathcal{M}$ dans la cohomologie de Čech avec valeur dans le groupe non-abélien $GA(2, \mathbb{Z})$.

Definition of the Quantum Monodromy

La classe $[\mathcal{M}] \in \check{H}^1(U, GA(2, \mathbb{Z}))$ est appelée la monodromie quantique de $(\Sigma(h), U)$.

Définition

Un opérateur (en général non-borné) $(A, D(A))$ sur un espace de Hilbert H est appelé normal s'il est densément défini, fermé et satisfait $A^*A = AA^*$.
Deux opérateurs $(A_1, D(A_1))$ et $(A_2, D(A_2))$ commutent s'il $A_1A_2 = A_2A_1$ (ou leur commutateur $[A_1, A_2] := A_1A_2 - A_2A_1 = 0$).

Soit A un opérateur normal, $D(A) = D$. On sait que $D(A^*) = D(A) = D$ et on peut donc définir la partie réelle et imaginaire de A par :

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2}, A_2 = \frac{A - A^*}{2i}, D(A_1) = D(A_2) = D. \qquad (1)$$

Alors $A = A_1 + iA_2$ et A_1 et A_2 sont auto-adjoint et commutent.

Considérons un exemple simple : Si H de dimension finie n et soient A_1, A_2 et $A := A_1 + iA_2$ comme au-dessus.
Alors on peut diagonaliser simultanément A_1 et A_2 sur une base hilbertienne $\{u_j\}$ de H :
$A_1 u_j = \alpha_j u_j$ et $A_2 u_j = \beta_j u_j$, ($\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$), $j = 1, \ldots, n$.
On a donc $\sigma(A) = \{\lambda_j := \alpha_j + i\beta_j, j = 1, \ldots, n\}$ et

$$\begin{aligned} \sigma_{conj}(A_1, A_2) &= \{(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^2, j = 1, \ldots, n\} \\ &= \{(Re(\lambda), Im(\lambda)) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \sigma_p(A)\}. \end{aligned}$$

En s'identifiant $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}$, on obtient :
$\sigma_p(A_1 + iA_2) \cong \sigma_{conj}(A_1, A_2)$.

Considérons un exemple simple : Si H de dimension finie n et soient A_1, A_2 et $A := A_1 + iA_2$ comme au-dessus.
Alors on peut diagonaliser simultanément A_1 et A_2 sur une base hilbertienne $\{u_j\}$ de H :
$A_1 u_j = \alpha_j u_j$ et $A_2 u_j = \beta_j u_j$, ($\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$), $j = 1, \ldots, n$.
On a donc $\sigma(A) = \{\lambda_j := \alpha_j + i\beta_j, j = 1, \ldots, n\}$ et

$$\begin{aligned} \sigma_{conj}(A_1, A_2) &= \{(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^2, j = 1, \ldots, n\} \\ &= \{(Re(\lambda), Im(\lambda)) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \sigma_p(A)\}. \end{aligned}$$

En s'identifiant $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}$, on obtient :
$\sigma_p(A_1 + iA_2) \cong \sigma_{conj}(A_1, A_2)$.
Il reste encore vrai dans le cas général ?

Théorème

Soient A un opérateur normal et $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ tels que le spectre de A dans $I_1 + iI_2$ est discret. On appelle la partie réelle et la partie imaginaire de A par A_1 et A_2. On a alors

$$\sigma(A) \cap (I_1 + iI_2) \cong \sigma_{conj}(A_1, A_2) \cap (I_1 \times I_2).$$

Remarque : Le résultat du théorème est aussi valide quand on remplace la condition de discrétion de A dans $I_1 + iI_2$ par celle de A_1 dans I_1 et celle A_2 dans I_2.

Pour le preuve, montrons que

Si $\lambda \in \sigma_p(A_1 + iA2) \Rightarrow Re(\lambda) \in \sigma_p(A_1), Im(\lambda) \in \sigma_p(A_2)$ et si $\lambda \in \sigma_{ess}(A_1 + iA2) \Rightarrow$ soit $Re(\lambda) \in \sigma_{ess}(A_1)$ ou soit $Im(\lambda) \in \sigma_{ess}(A_2)$.

Monodromie d'opérateur normal

Soit $P(h) = Op_h^w(p) : L^2(X) \supseteq D \to L^2(X)$ avec symbole de Weyl classique d'ordre 0, $p(x, \xi; h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x, \xi) h^j$.
Supposons que $A = P(h)$ est normal et on écrit
$P(h) = P_1(h) + iP_2(h)$ où $P_1 = Re(P), P_2 = Im(P)$
(commutent, a.a).
Remarque $p_0^{(1)} = Re(p_0), p_0^{(2)} = Im(p_0)$.
Nous supposons plus que l'application moment
$F : T^*X \ni (x, \xi) \to (p_0^{(1)}(x, \xi), p_0^{(2)}(x, \xi)) \in \mathbb{R}^2$ soit propre et de fibre connexe.
Pour un certain ensemble $U \subset U_r$ avec $\overline{U}$ compact, la monodromie quantique du (S.Q.I) $(P_1(h), P_2(h))$ est bien définie grâce au spectre conjoint.

D'autre part, si nous supposons que $\sigma(P(h)) \cap U$ soit discret, alors le théorème précédent nous donne

$$\sigma(P(h)) \cap U = \sigma_{conj}(P_1(h), P_2(h)) \cap U.$$

On peut donc avoir la définition :

Définition

Monodromie de l'opérateur h-pseudo-différentiel normal $P(h)$ sur U est la monodromie quantique du (S.Q.I) $(P_1(h), P_2(h))$ sur U. On l'appelle monodromie spectrale affine.

Considérons l'opérateur

$$P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q,$$

avec P, Q deux opérateurs ΨDO classiques d'ordre 0 et $P = P_{\varepsilon=0}$ est auto-adjoint (Q n'est pas nécessairement auto-adjoint). Le symbole principal, noté p_ε de P_ε est

$$p_\varepsilon = p + i\varepsilon q$$

et pour plus simple, supposons aussi que q est à valeur réelle (si non il suffit de remplacer q par $Re(q)$).

Considérons l'opérateur

$$P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q,$$

avec P, Q deux opérateurs ΨDO classiques d'ordre 0 et $P = P_{\varepsilon=0}$ est auto-adjoint (Q n'est pas nécessairement auto-adjoint). Le symbole principal, noté p_ε de P_ε est

$$p_\varepsilon = p + i\varepsilon q$$

et pour plus simple, supposons aussi que q est à valeur réelle (si non il suffit de remplacer q par $Re(q)$).
Nous supposons la condition elliptique à l'infini

$$|p_\varepsilon(x,\xi)| \geq \frac{1}{C} m(Re(x,\xi)), |\ (x,\xi)\ | \geq C, \tag{2}$$

pour certain $C > 0$ assez grand et m une fonction d'ordre (par ex $m = (1+ \mid x \mid + \mid \xi \mid)^{\frac{k}{2}}$)

Nous supposons de plus que p, q commutent .i.e. $\{p, q\} = H_p(q) = 0$ et que dp, dq linéairement indépendants p.p et l'application (p, q) est propre, de fibre connexe.
Alors le spectre de P_ε proche de 0 est discret et dans une bande de taille $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$Im(\sigma(P_\varepsilon) \cap \{z \in \mathbb{C} : |Rez| \leq \delta\}) \subset \varepsilon\Big[\inf_{p^{-1}(0)} q - o(1), \sup_{p^{-1}(0)} q + o(1)\Big]$$

quand $\varepsilon, h, \delta \to 0$.

Rappel du théorème des coordonnées Action-Angle

Notons U_r l'ensemble de valeurs régulières de l'appl. moment $\Phi = (p, q)$ (notons que $\Phi = (p, q)$ est déjà supposé propre et de fibre connexe). Pour tout point $c \in U_r$, nous avons :

Théorème d'Action-Angle

Soit $c \in U_r$ fixée, il existe des "coordonnées action-angle" au voisinage du tore $\Lambda_c := \Phi^{-1}(c) \subset T^*X$: $\exists r > 0$, un voisinage $\Omega := \Phi^{-1}(B(c, r))$ de Λ_c, un petit ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ de centre 0, un symplectomorphisme $\kappa : \Omega \to \mathbb{T}^2 \times D$ et un difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : D \to \varphi(D) = B(c, r)$ tels que : $\kappa(\Lambda_c) = \{\xi = 0\}$, $\Phi \circ \kappa^{-1}(x, \xi) = \varphi(\xi)$ pour tout $x \in \mathbb{T}^2, \xi \in D$ et $\varphi(0) = c$.

La forme normale de Birkhoff de P_ε microlocalement près d'un tore diophantien

Considérons $\Lambda_1 \in p^{-1}(0) \cap T^*X$ un tore diophantien donné (ici $c_1 = 0$). Dans des coord.A-A (x, ξ) au voisinage de Λ_1 telle que $\Lambda_1 \simeq \{\xi = 0\}$, les fonctions p, q réduisent à $\widetilde{p} = \varphi_1(\xi)$ et $\widetilde{q} = \varphi_2(\xi)$. Alors microlocalement, P_ε réduit à un nouvel opérateur, noté $\widetilde{P_\varepsilon}$ avec le symbole principal est

$$\widetilde{P}_0 = \varphi_1(\xi) + i\varepsilon\varphi_2(\xi), \tag{3}$$

tel que $\varphi_1(\xi) = \langle a, \xi \rangle + \mathcal{O}(\xi^2)$ et a est diophantien.i.e

$$|a \cdot k| \geq \frac{1}{C_0 |k|^{N_0}}, \quad \forall \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z}^2,$$

pour certains $C_0, N_0 > 0$.

Au niveau formel en (ξ, ε, h), nous utilisons un classement particulier : le degré d'un terme $\xi^k \varepsilon^m h^l$ est $j := k + 2(m + l)$. La filtration associée est notée par le symbole $\mathcal{O}(j)$ et comme d'habitude, notons $A = B + \mathcal{O}(j)$ pour dire $A - B \in \mathcal{O}(j)$.

Théorème

Pour tout entier $N \geq 1$, il existe une fonction $G^{(N)} = \sum_{j=2}^{N} G_j$ $(G^{(1)} = 0)$ où $G_j = G_j(x, \xi, \varepsilon, h)$ (pour $j \geq 2$) est analytique en x, homogène en (ξ, ε, h) d'ordre $(j-2)$ telle que

$$\exp\big(i\mathrm{ad}_{G^{(N)}}\big)\widetilde{P}_\varepsilon = \widetilde{P}_0 + hP_1^{(N)} + hR_{N-1}, \tag{4}$$

où $P_1^{(N)} = P_1^{(N)}(\xi, \varepsilon, h)$ est une série formelle indépendant de x et $R_{N-1} = \mathcal{O}(N-1)$. (ici $\mathrm{ad}_G(\cdot) = [G, \cdot]$)

Remarque : le terme h- principal après la procédure de forme normale de Birkhoff de P est toujours

$$\widetilde{P}_0 = \varphi_1(\xi) + i\varepsilon\varphi_2(\xi).$$

Développement asymptotique des valeurs propres

On suppose que $h \ll \varepsilon = \mathcal{O}(h^\delta)$ pour $0 < \delta < 1$.
Nous introduisons la fonction

$$\chi : u = (u_1, u_2) \mapsto \chi_u = (u_1, \varepsilon u_2) \cong u_1 + i\varepsilon u_2 \qquad (5)$$

Notons $B(\chi_u, r, \varepsilon) = \chi(B(u, r))\}$. On dit que $\chi_a \in B(\chi_c, r, \varepsilon)$ est une "bonne valeur" si le tore invariant $\Lambda_1 = \Phi^{-1}(a)$ dans T^*X est diophantien (+...) et notons $R(\chi_a)$ un "bon rectangle" associé de taille $\mathcal{O}(h^\delta) \cdot \mathcal{O}(\varepsilon h^\delta)$. Notons aussi $\xi_a = \varphi^{-1}(a) \in D$ les coor.A-A de Λ_1.
Alors, d'un résultat de Hitrik-Sjöstrand- Vu Ngoc + la FNB précédente nous avons : les valeurs propres de P_ε dans $R(\chi_a)$ modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ sont données par dév. asym. d'un fonction lisse $P(\xi, \varepsilon; h)$ au voisinage de ξ_a t.q sous la forme réduite,

$$\sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a) \ni \lambda = P\Big(\xi_a + h(k - \frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi}, \varepsilon; h\Big) + \mathcal{O}(h^\infty)$$
$$= \varphi_1\Big(\xi_a + h(k - \frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi}\Big) + i\varepsilon\varphi_2\Big(\xi_a + h(k - \frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi}\Big)$$
$$+\mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^\infty), \quad k \in \mathbb{Z}^2, \tag{6}$$

uniformément pour h, ε petits, où $S_1 \in \mathbb{R}^2$ est l'action et $k_1 \in \mathbb{Z}^2$ est l'indice de Maslov des cycles fondamentaux de Λ_1.

$$\sigma(P_\varepsilon)\cap R(\chi_a)\ni\lambda = P\Big(\xi_a + h(k-\frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi}, \varepsilon; h\Big) + \mathcal{O}(h^\infty)$$
$$= \varphi_1\Big(\xi_a + h(k-\frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi}\Big) + i\varepsilon\varphi_2\Big(\xi_a + h(k-\frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi}\Big)$$
$$+\mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^\infty), \quad k\in\mathbb{Z}^2, \ (6)$$

uniformément pour h, ε petits, où $S_1 \in \mathbb{R}^2$ est l'action et $k_1 \in \mathbb{Z}^2$ est l'indice de Maslov des cycles fondamentaux de Λ_1.
Remarque l'ensemble de bonne valeur est un ensemble de Cantor. Cependant, il est intéressant que le symb.prin. d'un tel dévelo. est bien défini "globalement" pour tout bon rectangle $R(\chi_a)$ dans $B(\chi_c, r, \varepsilon)$.
En effet, $\exists \tau_c \in \mathbb{R}^2$ t.q $\frac{S_1}{2\pi} = \xi_a + \tau_c$. Alors la formule de λ devient

$$\lambda = \varphi_1\Big(-\tau_c + h(k-\frac{k_1}{4})\Big) + i\varepsilon\varphi_2\Big(-\tau_c + h(k-\frac{k_1}{4})\Big) + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a) \ni \lambda &= P\Big(\xi_a + h(k - \frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi}, \varepsilon; h\Big) + \mathcal{O}(h^\infty) \\
&= \varphi_1\Big(\xi_a + h(k - \frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi}\Big) + i\varepsilon\varphi_2\Big(\xi_a + h(k - \frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi}\Big) \\
&\qquad + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^\infty), \quad k \in \mathbb{Z}^2, \qquad (6)
\end{aligned}
$$

uniformément pour h, ε petits, où $S_1 \in \mathbb{R}^2$ est l'action et $k_1 \in \mathbb{Z}^2$ est l'indice de Maslov des cycles fondamentaux de Λ_1.
Remarque l'ensemble de bonne valeur est un ensemble de Cantor. Cependant, il est intéressant que le symb.prin. d'un tel dévelo. est bien défini "globalement" pour tout bon rectangle $R(\chi_a)$ dans $B(\chi_c, r, \varepsilon)$.
En effet, $\exists \tau_c \in \mathbb{R}^2$ t.q $\frac{S_1}{2\pi} = \xi_a + \tau_c$. Alors la formule de λ devient

$$
\lambda = \varphi_1\Big(-\tau_c + h(k - \frac{k_1}{4})\Big) + i\varepsilon\varphi_2\Big(-\tau_c + h(k - \frac{k_1}{4})\Big) + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^\infty).
$$

Fonction inverse de λ ?

Il existe un difféomorphisme lisse $f = f(\lambda, \varepsilon; h)$ de $R(\chi_a)$ dans son image, noté $E(a, \varepsilon, h)$:

$$\begin{aligned} f : R(\chi_a) &\rightarrow E(a, \varepsilon, h) \qquad (7)\\ \lambda &\mapsto f(\lambda, \varepsilon; h) = \overbrace{\tau_c + \varphi^{-1} \circ \chi^{-1}(\lambda)}^{f_0} + \mathcal{O}(h) \\ \sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a) \ni \lambda &\mapsto f(\lambda, \varepsilon; h) \in h\mathbb{Z}^2 + \mathcal{O}(h^\infty). \end{aligned}$$

On appelle $\big(f(\varepsilon; h), R(\chi_a)\big)$ une "semi-carte" de $\sigma(P_\varepsilon)$ sur le domaine $U_r(\varepsilon) := \chi(U_r)$.

Remarque

C'est bien clair de (7) que

$$f_0 = f_0(\lambda) = \tau_c + \varphi^{-1} \circ \chi^{-1}(\lambda) \qquad (8)$$

est bien définie pour tout $\lambda \in B(\chi_c, r, \varepsilon)$.

Fonctions de transition

Soit $U \subset U_r$ avec $\overline{U}$ compact et notons $U(\varepsilon) = \chi(U)$.
Supposons $B_\alpha := B(c, r)$, $B_\beta := B(c', r')$ deux petites boules dans U avec $B_{\alpha\beta} := B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$ t.q nous pouvons appliquer le théorème A-A sur pour chaque boule.
Notons $B_\alpha(\varepsilon) = B(\chi_c, r, \varepsilon)$, $B_\beta(\varepsilon) = B(\chi'_c, r', \varepsilon)$, $B_{\alpha\beta}(\varepsilon) = B_\alpha(\varepsilon) \cap B_\beta(\varepsilon)$.
Pour un certain bon domaine $R(\chi_a) \subset B_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, nous supposons avoir deux semi-cartes associées de $\sigma(P_\varepsilon)$: $f_\alpha : R(\chi_a) \to E_\alpha(a, \varepsilon, h)$, $f_\beta : R(\chi_a) \to E_\beta(a, \varepsilon, h)$ définies comme dans (7) avec $f_{\alpha,0}$ et $f_{\beta,0}$ sont respectivement définis sur $B_\alpha(\varepsilon)$ et $B_\beta(\varepsilon)$

Théorème

Il existe une unique matrice constante $M_{\alpha\beta} \in GL(2, \mathbb{Z})$ telle que $f_{\alpha,0} = M_{\alpha\beta} f_{\beta,0}$ sur $B_{\alpha\beta}(\varepsilon)$.

Définition de la monodromie spectrale linéaire

Supposons que U est couvert par recouvrement localement fini $\{B_\alpha)\}$. Alors $\{(f_\alpha, R(\chi_a))\}$ avec a une bonne valeur sont des semi- cartes locales de $U(\varepsilon)$.
Sur chaque $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$, $\exists M_{\alpha\beta} \in GL(2,\mathbb{Z})$ vérifiant

$$f_{\alpha,0} = M_{\alpha\beta} f_{\beta,0}.$$

La famille $\{M_{\alpha\beta}\}$ définit 1-cocycle, notée $\mathcal{M}_{sp}$ dans la cohomologie de Čech avec valeur dans le groupe linéaire $GL(2,\mathbb{Z})$. Nous avons donc

Définition

La classe $[\mathcal{M}_{sp}] \in \check{H}^1(U(\varepsilon), GL(2,\mathbb{Z}))$ est appelée la monodromie spectrale linéaire de l'opérateur P_ε sur le domaine $U(\varepsilon)$.

On dit que P_ε a de la monodromie spectrale si la classe $[\mathcal{M}_{sp}] \in \check{H}^1(U(\varepsilon), GL(2,\mathbb{Z}))$ est non-triviale.
La non-trivialité de $[\mathcal{M}_{sp}]$ est alors équivalente à celle d'un morphisme de groupe (holonomie associée), noté μ^{sp}

$$\begin{aligned} \mu^{sp} : \pi_1(U(\varepsilon)) &\to GL(2,\mathbb{Z})/\{\sim\} \\ \gamma(\varepsilon) &\mapsto \mu^{sp}(\gamma(\varepsilon)), \end{aligned} \tag{9}$$

où $\{\sim\}$ noté modulo à conjugaison près.
On appelle μ^{sp} la représentation de la monodromie spectrale.

Relation avec la monodromie classique

On se rappelle par (8) que les symboles principals

$$f_{\alpha,0} = \tau_c + \varphi_\alpha^{-1} \circ \chi^{-1}$$
$$f_{\beta,0} = \tau_{c'} + \varphi_\beta^{-1} \circ \chi^{-1}. \tag{10}$$

D'autre part, indépendamment comme un résultat classique, $\exists A_{\alpha\beta} \in GA(2,\mathbb{Z})$ de la forme $A_{\alpha\beta} := M^{cl}_{\alpha\beta} + k$ avec $M^{cl}_{\alpha\beta} \in GL(2,\mathbb{Z})$, $k \in \mathbb{Z}^2$ telle que

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha = A_{\alpha\beta}$$

et que $\tau_c' = M^{cl}_{\alpha\beta}\tau_c - k$. Par conséquence, nous obtenons

$$f_{\alpha,0} = (M^{cl}_{\alpha\beta})^{-1} f_{\beta,0}.$$

Or, nous retrouvons bien le résultat du théorème précédent. Notons $M^{sp}_{\alpha\beta} := M_{\alpha\beta}$ définie par le théorème précédent, on a donc

$$M^{sp}_{\alpha\beta} = (M^{cl}_{\alpha\beta})^{-1}.$$

Nous rappelons que la monodromie classique (linéaire) (donnée par J.J. Duistermaat, 1980) $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \to c \in U$ est associée à une cocycle, notée $[\mathcal{M}_{cl}]$ dans $\check{H}^1(U, GL(2, \mathbb{Z}))$ des

$$\{d(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta) = M^{cl}_{\alpha\beta}\}.$$

Théorème

La monodromie spectrale linéaire est l'inverse de la monodromie classique linéaire

$$[\mathcal{M}_{sp}] = [\mathcal{M}_{cl}]^{-1}.$$

En d'autres termes, si les représentations de monodromie correspondantes de $[\mathcal{M}_{sp}]$ et $[\mathcal{M}_{cl}]$ sont

$$\begin{aligned} \mu^{sp} : \pi_1(U(\varepsilon)) &\to GL(2, \mathbb{Z})/\{\sim\} \\ \mu^{cl} : \pi_1(U) &\to GL(2, \mathbb{Z})/\{\sim\}, \end{aligned} \tag{11}$$

alors $\mu^{sp} = (\mu^{cl})^{-1}$.