Tests paramétriques

Retour au plan du cours

1 Introduction

Nous introduisons la problématique des tests statistiques par un exemple dans le domaine du contrôle de la qualité. Une usine fabrique des machines. Ces machines tombent en panne à un instant X aléatoire supposé suivre une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$ inconnu. Cette usine vend ces machines à une grande surface avec laquelle elle passe un contrat sur la qualité des machines fournies. Sur ce contrat on veut que la probabilité pour qu'une machine tombe en panne avant un instant t_0 (qui peut être par exemple la durée de la garantie proposée par la grande surface à ses clients) soit plus petite qu'une quantité donnée. Dans le cadre dans lequel nous sommes, il faut donc savoir si

$$\mathbb{P}_\lambda\left(X \leq t_0\right) \leq 1 - e^{-\lambda_0 t_0}, \tag{1}$$

pour un certain $\lambda_0 > 0$ connu, fruit des négociations entre la grande surface et son fournisseur. Comme la variable X suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, (1) est vérifiée si et seulement si $\lambda \leq \lambda_0$.

Pour savoir si la convention est respectée, le fournisseur lance régulièrement des études dans lesquelles il observe n machines prélevées parmi sa production et note $X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ les instants de panne des dites machines. Les X_i $i = 1, ..., n$ forment un n-échantillon de v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, le λ inconnu peut être estimé par la méthode des moments (ou du maximum de vraisemblance) par $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$. Pour savoir si $\lambda \leq \lambda_0$, une idée naturelle est de décider, au vu des observations, que l'hypothèse n'est pas vérifiée si $\hat{\lambda}$ est grand ou de manière équivalente si $\bar{X}$ est petit, plus petit qu'un seuil t à déterminer. Le problème revient donc à choisir le seuil. Comme nous allons le voir, le choix du seuil dépend des intérêts de chacun.

1.1 Point de vue du fournisseur :

Le fournisseur a intérêt à trouver un seuil pour lequel la probabilité de se tromper, sous l'hypothèse que $\lambda \leq \lambda_0$, est faible. En effet, cela obligerait le fournisseur à arreter sa production alors que ses produits sont d'une qualité acceptable. Il doit donc se fixer un niveau d'erreur assez petit, $\alpha = 1\%,\ 5\%,\ 10\%$ et cherche un seuil $t = t_\alpha$ de manière à ce que

$$\forall \lambda \leq \lambda_0,\ \ \mathbb{P}_\lambda\left(\bar{X} \leq t_\alpha\right) \leq \alpha,$$

ou encore que

$$\sup_{\lambda \leq \lambda_0} \mathbb{P}_\lambda\left(\bar{X} \leq t_\alpha\right) \leq \alpha.$$

Pour évaluer le membre de gauche, faisons quelques rappels sur la loi Gamma.

DÉFINITION 1. — *On appelle loi Gamma de paramètres $a, \lambda > 0$ et notée $\gamma(a, \lambda)$, la loi sur $\mathbb{R}_+$ ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue*

$$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}\{x > 0\} dx.$$

On a

- pour $a = 1$, $\gamma(1, \lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$,
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n Z_i^2\right)$ où les Z_i sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$.

Les lois Gamma ont les propriétés suivantes :

- si $X \sim \gamma(a, \lambda)$, $Y \sim \gamma(b, \lambda)$ et si X et Y sont indépendantes alors

$$X + Y \sim \gamma(a + b, \lambda).$$

- si $X \sim \gamma(a, \lambda)$ alors $\forall \mu > 0$,

$$\mu X \sim \gamma(a, \lambda/\mu).$$

En particulier on a que $2\lambda S_n \sim \gamma(n, 1/2) = \chi^2(2n)$. Soit $Z \sim \chi^2(2n)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda \leq \lambda_0} \mathbb{P}_\lambda\left(\bar{X} \leq t_\alpha\right) &= \sup_{\lambda \leq \lambda_0} \mathbb{P}_\lambda\left(2\lambda S_n \leq 2\lambda n t_\alpha\right) \\
&= \sup_{\lambda \leq \lambda_0} \mathbb{P}\left(Z \leq 2\lambda n t_\alpha\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq 2\lambda_0 n t_\alpha\right),
\end{aligned}$$

et le tout est donc plus petit que α en prenant $t_\alpha = x_{2n,\alpha}/(2n\lambda_0)$, où $x_{2n,\alpha}$ vérifie $\mathbb{P}(Z \leq x_{2n,\alpha}) = \alpha$ (on trouve la valeur dans une table).

On a fait ce qu'on appelle un test de *niveau* α de *l'hypothèse* $\lambda \leq \lambda_0$ contre (*l'alternative*) $\lambda > \lambda_0$. Pour ce test on rejette l'hypothèse si la *statistique de test* $\bar{X}$ vérifie $\bar{X} \leq t_\alpha = x_{2n,\alpha}/(2\lambda_0)$ (*règle de décision*).

Remarque : Comme nous allons le voir un test n'est pas du tout symétrique entre son hypothèse et son alternative : ici on a choisi de minimiser la probabilité de se tromper sous l'hypothèse que $\lambda \leq \lambda_0$ est vraie, on ne dit rien sur ce qui se passe sous l'alternative.

1.2 Point de vue de la grande surface :

Pour se garantir au mieux sur la qualité de la marchandise livrée, la grande surface aimerait que le seuil soit choisi de manière à ce que si $\lambda > \lambda_0$, $\mathbb{P}_\lambda\left(\bar{X} \leq t_\alpha\right)$ soit grande ! c'est à dire aimerait que $\inf_{\lambda>\lambda_0} \mathbb{P}_\lambda\left(\bar{X} \leq t_\alpha\right)$ soit proche de 1. Or, par des calculs analogues on obtient que le test précédent donne

$$\begin{aligned}\inf_{\lambda>\lambda_0} \mathbb{P}_\lambda\left(\bar{X} \leq t_\alpha\right) &= \inf_{\lambda>\lambda_0} \mathbb{P}(Z \leq 2\lambda n t_\alpha)\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

On ne peut pas trouver de t_α qui contente à la fois la grande surface et de son fournisseur.

2 Formalisme mathématique

Soit $(E, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ un modèle statistique, soit $\Theta_0 \subset \Theta$, $\Theta_1 \subset \Theta$ tels que $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$.

DÉFINITION 2. — *Faire un test de niveau $\alpha \in]0,1[$ de l'hypothèse $\mathrm{H}_0 : \theta \in \Theta_0$, contre $\mathrm{H}_1 : \theta \in \Theta_1$ au vu de l'observation X c'est se donner une zone de rejet $R_\alpha \in \mathcal{E}$ tel que*

$$\underbrace{\sup_{\theta\in\Theta_0} \mathbb{P}_\theta\left(X \in R_\alpha\right)}_{\text{Taille du test}} \leq \alpha.$$

On applique alors la règle de décision : on rejette H_0 si $X \in R_\alpha$.

Dans l'exemple précédent, $X = (X_1, ..., X_n)$, $R_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n x_i \leq n t_\alpha\}$. Comme on l'a vu, un test permet de garantir que sous l'hypothèse, la probabilité de se tromper est faible. Il ne garantit rien de ce qui se passe sous l'alternative. Un test n'est pas forcément un bon test : en prenant $R_\alpha = \varnothing$ (ce qui correspond à accepter tout le temps l'hypothèse !) on a un test de niveau α et de taille 0 ! Pour savoir si un test est bon ou mauvais il faut étudier ses performances sous l'alternative.

DÉFINITION 3. — *On appelle fonction puissance l'application*

$$\begin{array}{ccc}\Theta_1 : & \longrightarrow & [0,1]\\ \theta : & \mapsto & \mathbb{P}_\theta\left(X \in R_\alpha\right).\end{array}$$

Parmi les tests de même niveau on préfère toujours celui qui est le plus puissant.

DÉFINITION 4. — *On dira que le test basé sur la région de rejet R_α est meilleur que celui basé sur la région R'_α s'ils sont tous les deux de niveau α et que*

$$\forall\theta \in \Theta_1,\ \mathbb{P}_\theta\left(X \in R_\alpha\right) \geq \mathbb{P}_\theta\left(X \in R'_\alpha\right).$$

Evidemment, on ne peut pas toujours comparer deux tests.

DÉFINITION 5. — *On dit que le test basé sur la région de rejet R_α est uniformément plus puissant au niveau α si :*
1) $\sup_{\theta\in\Theta_0} \mathbb{P}_\theta(X \in R_\alpha) \leq \alpha$.
2) Pour toute région de rejet R'_α telle que $\sup_{\theta\in\Theta_0} \mathbb{P}_\theta(X \in R'_\alpha) \leq \alpha$, *on a*

$$\forall\theta \in \Theta_1,\ \mathbb{P}_\theta(X \in R_\alpha) \geq \mathbb{P}_\theta(X \in R'_\alpha).$$

3 Lemme de Neyman-Pearson

Soit $(E, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ un modèle statistique pour lequel on suppose, que pour tout θ, $P_\theta << \mu$, on notera $f(\theta, .)$ les densités correspondantes. On cherche à tester que $\theta \in \Theta_0$ contre $\theta \in \Theta_1$ au niveau α. On considère le cas de deux hypothèses simples $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = \{\theta_1\}$.
On s'intéresse aux tests qui consistent à rejeter $H_0 : \theta = \theta_0$ si

$$X \in R_\alpha = \{x, f(\theta_1, x) > k_\alpha f(\theta_0, x)\}$$

où k_α est déterminé pour que

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(X \in R_\alpha) \leq \alpha.$$

Dans certains cas, nous aurons besoin de tests de taille α c'est-à-dire de tests pour lesquels $\mathbb{P}_{\theta_0}(X \in R_\alpha) = \alpha$. Pour garantir cette égalité, on a parfois recours à des tests randomisés : soit

$$c_\alpha = \inf\{k, \mathbb{P}_{\theta_0}(f(\theta_1, X) > kf(\theta_0, X)) \leq \alpha\}.$$

Si $\mathbb{P}_{\theta_0}(f(\theta_1, X) > c_\alpha f(\theta_0, X)) = \alpha$, on a un test de taille α. Sinon,

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(f(\theta_1, X) > c_\alpha f(\theta_0, X)) = \alpha' < \alpha.$$

On pose $\eta = (\alpha - \alpha')/\mathbb{P}_{\theta_0}(f(\theta_1, X) = c_\alpha f(\theta_0, X))$ (le dénominateur est non nul dans ce cas).
On définit alors le test randomisé de la façon suivante :
-si $f(\theta_1, X) > c_\alpha f(\theta_0, X)$, on rejette H_0
-si $f(\theta_1, X) = c_\alpha f(\theta_0, X)$ on rejette H_0 avec probabilité η, et on l'accepte avec probabilité $1 - \eta$ (on randomise)
-si $f(\theta_1, X) < c_\alpha f(\theta_0, X)$, on accepte H_0.
Vérifier que ce test est de taille α.

LEMME 6. — **Lemme de Neyman-Pearson**
On considère un test de taille α (pour tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$) pour lequel on rejette H_0 si $f(\theta_1, X) > c_\alpha f(\theta_0, X)$ et on accepte H_0 si $f(\theta_1, X) < c_\alpha f(\theta_0, X)$, où

$$c_\alpha = \inf\{k, \mathbb{P}_{\theta_0}(f(\theta_1, X) > kf(\theta_0, X)) \leq \alpha\}.$$

(si nécessaire, on randomise lorsque $f(\theta_1, X) = c_\alpha f(\theta_0, X)$.
Un tel test est appelé test de Neyman-Pearson et il est uniformément plus puissant parmi les tests de niveau α pour tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$.

3.1 Exemple 1 : Modèle de Bernoulli

On prend $\Theta =]0, 1[$, $P_\theta = \mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}$, $X = (X_1, ..., X_n)$, $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ avec $\theta_1 > \theta_0$. On a alors

$$T = \frac{f(\theta_1, X)}{f(\theta_0, X)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{S_n} \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-S_n}.$$

On rejette H_0 quand

$$\begin{aligned}
& T \text{ est grand} \\
\Leftrightarrow \quad & \log(T) = S_n \log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + (n - S_n)\log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) \text{ est grand} \\
\Leftrightarrow \quad & \underbrace{S_n \log\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)}_{>0} + n\log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) \text{ est grand} \\
\Leftrightarrow \quad & S_n \text{ est grand.}
\end{aligned}$$

La zone de rejet est donc de la forme $\{S_n > s_\alpha\}$ où s_α vérifie

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(S_n > s_\alpha) \leq \alpha.$$

Dans la pratique on détermine le s_α de l'une des manières suivantes :

– comme on sait que sous l'hypothèse, $S_n \sim \mathcal{B}(n, \theta_0)$, on regarde sur une table. Pour obtenir un test de taille α, on utilise un test randomisé.
– Si n est assez grand, on utilise une approximation gaussienne : $(S_n - n\theta_0)/\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on prend donc $s_\alpha = n\theta_0 + \sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}z_{1-\alpha}$ où $z_{1-\alpha}$ est tel que $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) > z_{1-\alpha}) = \alpha$. $z_{1-\alpha}$ est le $(1 - \alpha)$ quantile de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

3.2 Exemple 2 : Modèle gaussien

On considère $X = (X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. σ est supposé connu. On veut tester $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m = m_1$ avec $m_1 > m_0$. Le test de Neymann-Pearson consiste à rejeter H_0 si

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i > m_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

où $z_{1-\alpha}$ est le $1-\alpha$ quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3.3 Généralisation à des hypothèses composites

Sous certaines conditions, on peut montrer que le test de Neymann-Pearson est UPP parmi les tests de niveau α pour tester des hypothèses composites.

PROPOSITION 7. — *On considère le test de Neymann-Pearson pour tester H_0 : $\theta=\theta_0$ contre H_1 : $\theta=\theta_1$ avec $\theta_1>\theta_0$. Supposons que ce test ne dépende pas de θ_1 et soit de niveau α pour tester $\tilde{H}_0$: $\theta\leq\theta_0$ contre $\tilde{H}_1$: $\theta>\theta_0$. Alors le test est UPP pour tester $\tilde{H}_0$ contre $\tilde{H}_1$ parmi les tests de niveau α.*

La proposition s'applique aux deux exemples précédents.

4 Test du rapport du maximum de vraisemblance

Soit $(E,\mathcal{E},\mathcal{F})$ un modèle statistique pour lequel on suppose, que pour tout θ, $P_\theta << \mu$, on notera $f(\theta,.)$ les densités correspondantes. On cherche à tester que $\theta\in\Theta_0$ contre $\theta\in\Theta_1$ au niveau α.
Pour cela on considère la *statistique de test*

$$T=\frac{\sup_{\theta\in\Theta_1} f(\theta,X)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} f(\theta,X)},$$

appelée *rapport du maximum de vraisemblance*. Le test qui rejette l'hypothèse pour de grandes valeurs de T est appelé *test du rapport du maximum de vraisemblance*. Plus précisement, on rejette si $T\geq t_\alpha$, où t_α est choisi (quand il existe) vérifiant

$$\forall\theta\in\Theta_0,\ \mathbb{P}_\theta\left(T(X)\geq t_\alpha\right)\leq\alpha.$$

4.1 Exemple : Loi exponentielle

Soit $X_1,\dots,X_n$ un n-échantillon de v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ ou $\lambda>0$. On veut tester $\lambda\leq\lambda_0$ contre $\lambda=\lambda_1$ avec $\lambda_1>\lambda_0$. On a $f(\lambda,X)=\lambda^n e^{-\lambda S_n}$ et donc

$$T=\frac{\lambda_1^n e^{-\lambda_1 S_n}}{\sup_{\lambda\leq\lambda_0}\lambda^n e^{-\lambda S_n}}.$$

Calculons ce sup, pour cela étudions la fonction $\varphi_{S_n}(\lambda)=n\log(\lambda)-\lambda S_n$. On a que φ_{S_n} est croissante sur $]0,n/S_n]$ et décroissante sur $]n/S_n,+\infty[$. On distingue donc entre 2 cas

– si $S_n\leq n/\lambda_0$, alors le sup est atteint en $\lambda=\lambda_0$ et on a donc

$$T=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n e^{-\underbrace{(\lambda_1-\lambda_0)}_{>0}S_n}=\Psi(S_n)$$

qui est grand lorsque S_n est petit car Ψ est décroissante sur $]0,n/\lambda_0]$.

– si $S_n\geq n/\lambda_0$, le sup est atteint en $\lambda=n/S_n$ et on obtient alors que

$$T=\left(\frac{\lambda_1}{n}S_n\right)^n e^{-\lambda_1 S_n+n}=\left(\frac{e\lambda_1}{n}\right)^n e^{\varphi_{\lambda_1}(S_n)}=\Psi(S_n),$$

qui est grand lorsque S_n est petit car Ψ est décroissante sur $[n/\lambda_0,+\infty[$.

On a donc écrit $T=\Psi(S_n)$ avec Ψ décroissante, par conséquant la zone de rejet s'écrit

$$\{T\geq t_\alpha\}=\{S_n\leq s_\alpha\},$$

où s_α est comme dans la Section 1. Ici encore, la zone de rejet ne dépend pas de λ_1 et on peut montrer que le test ci-dessus est UPP parmi les tests de niveau α pour tester $\lambda\leq\lambda_0$ contre $\lambda>\lambda_0$.