UNIVERSITÉ TOULOUSE III - **Licence de mathématiques fondamentales**
TOPOLOGIE – 30 juin 2008 – Durée 3 heures.

Document autorisé : le résumé de cours.

Exercice 1. L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa topologie usuelle. Soient $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\}$, $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$, $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\}$, $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) En justifiant vos réponses, dire pour chacune des parties A_1,..., A_5 de $\mathbb{R}^2$ si elle est ou non compacte, connexe.

b) Pour chaque couple (A_i, A_j), $1 \leq i < j \leq 5$ dire s'il existe ou non un homéomorphisme de A_i sur A_j, et si oui, exhiber un tel homéomorphisme.

Exercice 2. Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $||.||_\infty$ de la convergence uniforme. On pose pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$:

$$\Phi f(x) = \int_0^x (\int_0^t u^2 f(u) \mathrm{d}u) \mathrm{d}t.$$

Montrer que :
1. Φ est une application linéaire continue de norme $1/12$.
2. il existe une unique fonction $f \in E$ telle que l'on ait pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = x^3 + \int_0^x (\int_0^t u^2 f(u) \mathrm{d}u) \mathrm{d}t.$$

Exercice 3.
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose f non continue en $a \in \mathbb{R}$. Prouver l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ et d'une suite $(x_n)_n$ de réels convergeant vers a tels que l'on ait : $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$.
2. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et de graphe $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$ fermé dans $\mathbb{R}^2$ est continue.

Problème.
1. Soient E, F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F. On suppose l'existence de deux réels $M > 0$ et $a \in]0,1[$ tels que pour tout $y \in F$ avec $||y|| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que

$$||y - Tx|| \leq a \text{ et } ||x|| \leq M.$$

a) Montrer que l'on peut construire pour tout $y \in F$ de norme $||y|| \leq 1$ une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que l'on ait pour tout n de $\mathbb{N}$: $||x_n|| \leq M$ et $||y - Tx_0 - aTx_1 - ... - a^n Tx_n|| \leq a^{n+1}$.

b) Montrer que la série $\sum_0^\infty a^n x_n$ converge dans E et que sa somme x vérifie $||x|| \leq M/(1-a)$.

c) Déduire des questions précédentes que T est surjective et telle que pour tout $y \in F$ de norme $||y|| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que : $Tx = y$ et $||x|| \leq M/(1-a)$.

2. Soit (X,d) un espace métrique et A un fermé non vide de X. On note E (resp. F) l'espace des fonctions continues bornées de X dans $\mathbb{R}$ (resp. continues bornées de A dans $\mathbb{R}$) muni de la norme de la convergence uniforme $f \in E \mapsto ||f||_X = \sup_{x\in X} |f(x)|$ (resp. $f \in F \mapsto ||f||_A = \sup_{x\in A} |f(x)|$).
Le but de la question est de prouver que toute fonction réelle continue sur A se prolonge continuement à X.
Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur A.

a) *On suppose* $||f||_A \leq 1$.
On note $G_+ = \{x \in A \,|\, 1/3 \leq f(x) \leq 1\}$, $G_- = \{x \in A \,|\, -1 \leq f(x) \leq -1/3\}$ et on pose $g(x) = \frac{1}{3} \frac{d(x,G_-) - d(x,G_+)}{d(x,G_-) + d(x,G_+)}$. Montrer que $g \in E$, $||g||_X \leq 1/3$ et $\sup_{x\in A} |g(x) - f(x)| \leq 2/3$.
(on distinguera trois cas).
En déduire, en appliquant la question 1 à une application T que l'on précisera, l'existence d'une fonction continue $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ qui prolonge f et telle que $||\tilde{f}||_X \leq 1$

.../...

b) *On suppose* $|f(x)| < 1$ *pour tout* x *de* A.
Soit g un prolongement continu de f à X avec $||g||_X \leq 1$. Montrer que la fonction $\tilde{f} = \varphi g$, où $\varphi(x) = \frac{1}{1+d(x,A)}$, est un prolongement continu de f à X et vérifie $|\tilde{f}(x)| < 1$ pour tout x de X.

c) *On ne suppose plus* f *bornée.*
Donner un exemple d'homéomorphisme ψ de $\mathbb{R}$ sur $]-1,+1[$. Montrer que f admet un prolongement continu sur X (on pourra considérer $\psi \circ f$).

3. (BONUS) Soit (X, d) un espace métrique.

a) On suppose X non compact. Soit $(w_n)_n$ une suite de points deux à deux distincts de X sans valeur d'adhérence. Montrer que l'ensemble $A = \{w_n, n \in \mathbb{N}\}$ est discret et que l'application $f : w_n \in A \mapsto n$ est continue et se prolonge en une application continue et non bornée sur X.

b) En déduire que si toute application continue sur X est bornée alors X est compact.

BAREME INDICATIF : Exercice 1 : 5 points - Exercice 2 : 3 points - Exercice 3 : 4 points - Problème : 8 points.