Réponses à quelques questions de la séance 1 de soutien de Topologie de septembre 2008

Base de topologie et topologie engendrée

Etant donné un **espace topologique** $(X, \mathcal{T})$, un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X est appelé une base de $\mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{T}$ est l'ensemble des réunions d'éléments de X (y compris $\emptyset$, qui par définition est la réunion indexée par $\emptyset$).

Etant donné un **ensemble** X, un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X est une base de topologie sur X si et seulement s'il existe une topologie sur X (alors unique) dont $\mathcal{B}$ soit une base, autrement dit si et seulement si l'ensemble des réunions d'éléments de X vérifient les axiomes d'une topologie.

Théorème (cf séance 2 de soutien) cela équivaut à : X est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, et l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathcal{B}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Corollaire : pour tout ensemble $\mathcal{P}$ de parties de X, en posant $\mathcal{B} =$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{P}$ (y compris X, qui dans ce contexte est par convention l'intersection indexée par $\emptyset$), $\mathcal{B}$ est base d'une certaine topologie $\mathcal{T}(P)$ sur X.

Remarque : par construction, $P \subset \mathcal{T}(P)$ et toute topologie contenant $\mathcal{P}$ contient $\mathcal{T}(P)$ (en particulier $\mathcal{T}(P)$ est la moins fine d'entre elles). On appelle $\mathcal{T}(P)$ la topologie engendrée par $\mathcal{P}$. (Une base de cette topologie est l'ensemble $\mathcal{B}$ décrit ci-dessus ; en général $\mathcal{P}$ ne vérifie pas la seconde propriété du théorème, donc n'est pas une base).

Topologie initiale

Etant donnés un **ensemble** X, des **espaces topologiques** $(X_i, \mathcal{T}_i)$, et des applications $f_i : X \to X_i$, les topologies sur X pour lesquelles les f_i sont continues sont exactement (par le critère de continuité pour les ouverts, cf séance 2 de soutien) celles qui contiennent l'ensemble $\mathcal{P}$ de toutes les parties de X de la forme $f_i^{-1}(O_i)$ avec $O_i \in \mathcal{T}_i$, autrement dit (vu ce qui précède) celles qui contiennent la topologie engendrée par $\mathcal{P}$. (En particulier, celle-ci est la moins fine d'entre elles). Cette topologie est appelée la topologie initiale associée aux données.

Cas particulier : si l'ensemble X est le produit des X_i et si les f_i sont les projections canoniques, la topologie initiale associée est appelée produit des $\mathcal{T}_i$. $\mathcal{P}$ est l'ensemble des parties de X de la forme $\prod_{i \in I} U_i$ où l'un des U_i appartient au $\mathcal{T}_i$ correspondant et tous les autres sont égaux à l'espace correspondant tout entier X_i, donc $\mathcal{B}$ est l'ensemble des parties de X de la forme $\prod_{i \in I} U_i$ où un nombre fini d'entre les U_i appartiennent aux $\mathcal{T}_i$ correspondants et tous les autres sont égaux à l'espace correspondant tout entier X_i. $\mathcal{B}$ est appelé l'ensemble des ouverts élémentaires du produit.

Produit dénombrable d'espaces métriques

Etant donnée **une suite d'espaces métriques** (X_n, d_n), de topologies associées $\mathcal{T}_n$, d la distance sur l'ensemble produit X définie par $d(x, y) = \max_{n \in \mathbf{N}} \min(2^{-n}, d_n(x_n, y_n))$, $\mathcal{T}$ la topologie associée à d, et $\mathcal{T}'$ la topologie produit des $\mathcal{T}_n$. Montrons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

- $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$: il suffit de prouver que tout ouvert élémentaire appartient à $\mathcal{T}$, ou (ce qui revient au même) que chaque projection canonique $f_n : X \to X_n, x \mapsto x_n$ est continue pour $\mathcal{T}$. En fait f_n est même uniformément continue pour les distances d, d_n puisque pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\eta = \min(\varepsilon, 2^{-n})$, on a $d(x, y) < \eta \Rightarrow d_n(x_n, y_n) < \varepsilon$.
- $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$: d'après la caractérisation (pour chacune des deux topologies) d'un ouvert ($\Leftrightarrow$ voisinage de chacun de ses points), il suffit de prouver que toute d-boule $B(x, \varepsilon)$ contient un ouvert élémentaire contenant x. On a mieux : $B(x, \varepsilon)$ est un ouvert élémentaire contenant x, puisque $B(x, \varepsilon) = \prod_{n \in \mathbf{N}} U_n$ avec $U_n = B(x_n, \varepsilon)$ si $2^{-n} \geq \varepsilon$ et $U_n = X_n$ si $2^{-n} < \varepsilon$.