Licence de mathématiques fondamentales - TOPOLOGIE
Cours de soutien du 01/10/07 : Dénombrabilité

§I **Comparaison (de tailles) d'ensembles** *L'étudiant qui aura bien assimilé ce cours est invité à fureter ailleurs pour assouvir sa curiosité sur les cardinaux, l'axiome du choix, le théorème de Zermelo, le lemme de Zorn, l'hypothèse du continu.*

Définitions I.1

i) A a "autant d'éléments" que B ssi il existe une bijection de A dans B.

ii) A a "au plus autant d'éléments" que B ssi il existe une injection de A dans B.

ii) A a "au moins autant d'éléments" que B ssi il existe une surjection de A dans B.

Remarques I.2

i) Ces définitions généralisent le cas évident des ensembles finis.

ii) Ces trois "relations" entre ensembles sont réflexives et transitives (pourquoi ?), et la première est symétrique et implique les deux autres.

iii) Si $A \subset B$ alors A a au plus autant d'éléments que B (pourquoi ?), mais – contrairement à l'intuition – il peut en avoir autant, même quand l'inclusion est stricte (exemples, contre-exemples ?)

Théorème I.3. Supposons $A \neq \emptyset$. Alors A a "au plus autant d'éléments" que B ssi B a "au moins autant d'éléments" que A.

Preuve. $\Rightarrow$: Soient f une injection de A dans B et a un élément de A. Définissons $g : B \to A$ en posant $g(b) = a$ si $b \notin \mathrm{Im} f$, $g(b) =$ l'antécédent (unique) de b par f si $b \in \mathrm{Im} f$. Alors $g \circ f = id_A$ donc g est surjective. $\Leftarrow$ résulte d'un des énoncés de l'axiome du choix : pour toute surjection $g : B \to A$ il existe une application $f : A \to B$ telle que $g \circ f = id_A$ (ce qui implique f injective).

Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein I.4. Si A a "au plus autant d'éléments" que B et B a "au plus autant d'éléments" que B alors A, B ont "autant d'éléments" l'un que l'autre.

Preuve : cf IV.4

Lorsqu'on formalise les définitions ci-dessus en termes de cardinaux, cela signifie que $\leq$ est antisymétrique. On sait déjà qu'elle est réflexive et transitive. Il est donc naturel de se demander si cette "relation d'ordre sur les cardinaux" est totale.

Théorème I.5. Deux ensembles A, B sont toujours comparables, i.e. il existe toujours une injection de A dans B ou de B dans A.

Preuve (omise). C'est une conséquence du "théorème" de Zermelo, qui est en fait un axiome, équivalent à l'axiome du choix. On peut même montrer que réciproquement, ces axiomes sont conséquences de l'énoncé ci-dessus.

Théorème de Cantor I.6. A a toujours "strictement moins d'éléments" que $\mathcal{P}(A)$, c'est-à-dire au plus autant mais pas autant.

Preuve. A a évidemment au plus autant d'éléments que $\mathcal{P}(A)$ (pourquoi ?). Montrons par l'absurde qu'il n'en a pas autant. Soit f une bijection de A dans $\mathcal{P}(A)$. Posons $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ et $b = f^{-1}(B)$. Alors $b \in B \Leftrightarrow b \notin B$.

Remarque. L'hypothèse du continu est (aussi) un axiome optionnel de la théorie des ensembles, qui affirme que si A est infini, "il n'y a rien entre ces deux cardinaux", autrement dit que si B a strictement moins d'éléments que $\mathcal{P}(A)$ alors il en a au plus autant que A.

§II **Définitions**

Définition II.1. L'ensemble N des entiers, muni de l'élément 0 et de l'application successeur S ($S(n) = n+1$) est caractérisé (à bijection près) par : S est une bijection de N dans $\mathrm{N}^* := \mathrm{N} \setminus \{0\}$ et (principe de récurrence) toute partie de N contenant 0 et stable par S est égale à N tout entier.

Remarques II.2

i) Ceci est une façon de dire que N est (à bijection près) "le plus petit ensemble infini". En effet, N est infini (cf Remarque I.2.iii) et pour tout ensemble infini A on peut construire par récurrence (et axiome du choix dépendant) une injection de N dans A.

ii) On en déduit facilement (exo) que A est infini ssi il a autant d'éléments que $A \setminus \{a\}$, où a est un élément arbitraire de A.

Définitions II.3

- A est dénombrable ssi il a autant d'éléments que N (autrement dit ssi il existe une bijection de N dans A).
- A est au plus dénombrable ssi il a au plus autant d'éléments que N (autrement dit ssi il existe une injection de A dans N, ou encore – d'après I.3 – une surjection de N dans A).

Remarques II.4

- Dans ce cas particulier, pas besoin de l'axiome du choix pour construire, à partir d'une surjection $g : \mathrm{N} \to A$, une application $f : A \to \mathrm{N}$ telle que $g \circ f = id_A$ (ce qui implique f injective) : il suffit de poser $f(a) =$ le plus petit antécédent de a par g.
- Une application de N dans A n'est rien d'autre qu'une suite à valeurs dans A. Donc A est au plus dénombrable ssi A est l'ensemble des valeurs d'une suite, et A est dénombrable ssi A est l'ensemble des valeurs d'une suite injective.
- Attention, chez certains auteurs, "dénombrable" signifie ce que nous appelons ici "au plus dénombrable", et "infini dénombrable" ce que nous appelons ici "dénombrable". Les deux notions sont reliées par la proposition suivante.

Proposition II.5. A est au plus dénombrable ssi A est soit fini, soit dénombrable.

Preuve. $\Leftarrow$ immédiat. $\Rightarrow$: Soient A infini et $f : A \to \mathrm{N}$ une injection. Montrons que A est dénombrable. Posons $B = f(A)$. B est une partie infinie de N et il suffit de montrer que B est dénombrable (pourquoi ?). On construit facilement par récurrence (exo) une suite $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ à valeurs dans B, strictement croissante (donc $b_n \geq n$), et telle que $\forall b \in B \setminus \{b_0, \ldots, b_n\}, b_n < b$, et on en déduit (exo) que cette suite est injective et que l'ensemble de ses valeurs est B.

Proposition II.6

- Si A a au plus autant d'éléments que B et si B est au plus dénombrable alors A aussi. En particulier, toute partie d'un ensemble au plus dénombrable (par exemple toute partie de N) est au plus dénombrable.
- Si A a au moins autant d'éléments que B et si A est dénombrable alors B aussi.

§III **Propriétés, exemples**

$\mathrm{N}, \mathrm{N}^*, 2\mathrm{N}$, ou plus généralement toute partie infinie de N (ou d'un ensemble dénombrable) est dénombrable (pourquoi ?)

$\mathrm{Z} = \mathrm{N}^* \cup -\mathrm{N}$ est dénombrable car il a autant d'éléments que l'ensemble $\mathrm{N} \times \{0, 1\}$ (pourquoi ?), qui est dénombrable (pourquoi ?). Plus généralement, (de même) la réunion de deux ensembles dénombrables (donc par récurrence, d'une famille finie non vide d'ensembles dénombrables) est dénombrable. Donc la réunion d'une famille finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable (pourquoi ?).

Encore mieux : la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, car ceci revient (exo) à dire que $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ est dénombrable (exo). On en déduit (exo) que la réunion d'une famille au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

De la dénombrabilité de $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ on déduit aussi (exo) : le produit de deux ensembles dénombrables (donc par récurrence, d'une famille finie d'ensembles dénombrables) est dénombrable. Donc le produit d'une famille finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable (pourquoi ?).

Attention (contrairement à la réunion dénombrable ou au produit fini) le produit d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables n'est jamais dénombrable. Pire, le produit d'une famille dénombrable d'ensembles finis n'est pas au plus dénombrable, sauf exceptions triviales (lesquelles ?). En effet, si $A_n = \{0,1\}$ pour tout $n \in \mathrm{N}$ alors l'ensemble $\{0,1\}^{\mathrm{N}} := \prod_{n\in\mathrm{N}} A_n$ des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ a autant d'éléments que $\mathcal{P}(\mathrm{N})$ (pourquoi ?), qui n'est pas au plus dénombrable (pourquoi ?).

§IV **Exercices.**

1) Prouver que l'ensemble Q des rationnels est dénombrable (construire une surjection de $\mathrm{Z} \times \mathrm{N}^*$ dans Q).

2)a) Prouver que $[0,1]$ a autant d'éléments que $\{0,1\}^{\mathrm{N}}$ (donc n'est pas dénombrable). Indication : construire d'une part (en utilisant la numération binaire) une surjection de $\{0,1\}^{\mathrm{N}}$ dans $[0,1]$, et d'autre part (en utilisant la numération ternaire) une injection f de $\{0,2\}^{\mathrm{N}}$ dans $[0,1]$. Remarque : $\mathrm{Im} f$, appelé l'ensemble triadique de Cantor, a donc lui aussi autant d'éléments que $\{0,1\}^{\mathrm{N}}$. Pourtant il est "plein de trous" puisque c'est ce qui reste de $[0,1]$ quand on enlève le tiers du milieu, $]1/3, 2/3[$, puis, de chacun des deux tiers restants $[0,1/3]$ et $[2/3,1]$, on enlève de même le tiers du mileu, etc.

b) En déduire que R a autant d'éléments que $\{0,1\}^{\mathrm{N}}$.

3)a) Prouver que l'ensemble $\overline{\mathrm{Q}}$ des nombres complexes algébriques (c'est-à-dire racines d'une équation polynômiale à coefficients dans Q) est dénombrable.

b) En déduire que $\mathrm{R} \setminus \overline{\mathrm{Q}}$ a autant d'éléments que R. Indication : pour montrer que si A est infini et B dénombrable alors A a autant d'éléments que $A \cup B$, remarquer que A contient un C dénombrable donc en bijection avec $C \cup B$, et étendre cette bijection en une bijection de A dans $A \cup B$.

4) (Preuve de I.4) Soient f une injection de A dans B et g une injection de B dans A. Le but est de construire une bijection $h : A \to B$. Pour tout $x \in A$ on pose $x_0 = x$, $x_1 =$ l'antécédent de x_0 par g s'il existe, $x_2 =$ l'antécédent de x_1 par f s'il existe, etc. on construit ainsi une suite à valeurs alternativement dans A et B, qui ou bien s'arrête sur un $x_n \in A$ (avec n pair) sans antécédent par g (on notera alors $x \in A_A$), ou bien s'arrête sur un $x_n \in B$ (avec n impair) sans antécédent par f (on notera alors $x \in A_B$), ou bien ne s'arrête pas (on notera alors $x \in A_\infty$). On partitionne de même B en B_B, B_A, B_∞. Démontrer que $f(A_A) = B_A$ et $f(A_\infty) = B_\infty$ (donc de même $g(B_B) = A_B$ et $g(B_\infty) = A_\infty$), puis utiliser ces égalités pour construire h.

5) Redémontrer II.5 à partir de II.2.i, en utilisant I.4. Inversement, déduire II.2.i de II.5, en utilisant I.5.