Licence de mathématiques fondamentales - TOPOLOGIE
T.D. de soutien du 17/12/07 et du 07/01/08 : (fin de la connexité et) e.v.n.

Corrigé de l'exercice 97 des annales

Notons $\sim$ la relation d'équivalence dont les classes sont les composantes connexes ($x \sim y \Leftrightarrow$ il existe une partie connexe de X contenant à la fois x et y). Soient $x \in X$, i tel que $x \in O_i$, et O l'ouvert (complémentaire) $\cup_{j \neq i} O_j$. Si $y \in O_i$ alors (par connexité de O_i) $x \sim y$. Si au contraire $y \in O$ alors $x \not\sim y$ puisque pour tout $Y \in X$ contenant à la fois x et y, Y est non connexe car il est l'union disjointe de ses deux ouverts non vides $O_i \cap Y$ et $O \cap Y$. En résumé, pour $x \in O_i$, $x \sim y \Leftrightarrow y \in O_i$, donc la composante connexe de x est O_i.

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ avec la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$. Montrer que la forme linéaire $f \in E \mapsto f(0) \in \mathrm{R}$ n'est pas continue. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de E nulles en 0 ?

Exercice 2. Soient E, F deux e.v.n. et $L : E \to F$ une application linéaire vérifiant : $(L(x_n))_n$ est bornée dans F pour toute suite $(x_n)_n$ de E tendant vers $0 \in E$. Montrer que L est continue.

Exercice 3. Donner des exemples d'applications linéaires bijectives continues dont la réciproque n'est pas continue.

Exercice 4. Soient $(E, \| \ \|)$, $(F, \| \ \|')$ deux e.v.n., $S(E)$ la sphère unité de E et $T \in L(E, F)$.

a) On pose $N(x) = \|T(x)\|'$, vérifier que N est une semi-norme sur E. A quelle condition (sur T) est-ce une norme ?

b) Soit N une semi-norme sur E (par exemple celle de a), ou alors une quelconque norme sur E) et $C > 0$. Prouver les équivalences
$\forall x \in E, N(x) \leq C\|x\| \Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0\}, N(x) \leq C\|x\| \Leftrightarrow \forall x \in S(E), N(x) \leq C$,
et montrer s'il existe de tels C, le plus petit est
$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} N(x)/\|x\| = \sup_{x \in S(E)} N(x)$.

Exercice 5. Soient E_1, E_2 et F deux e.v.n. et $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Montrer que B est continue si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \|B(x)\| \leq M\|x_1\|\|x_2\|$.

Exercice 6. Calculer la norme des opérateurs suivants :

Le shift sur l^∞ défini par $S(x)_{n+1} = x_n$, $S(x)_0 = 0$.

$X = \mathcal{C}([0,1])$ et $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.

Calculer la norme des formes linéaires suivantes :

$X = \mathcal{C}([0,1])$ et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$ où $g \in X$ est une fonction qui s'annule qu'en $x = 1/2$.

$X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X.

$X = l^1$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans l^∞.

X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \to \mathrm{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Exercice 7. Soient $(E, \| \ \|)$, $(F, \| \ \|')$ deux e.v.n. et G un s.e.v. de E.

a) Vérifier que l'application $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(G,F), T \mapsto T_{|G}$ est linéaire continue et déterminer sa norme.

b) Montrer que si G est dense dans E alors cette application est une isométrie.

Exercice 8. On se place sur R^2. Trouver les "meilleures" constantes α, β telles que $\alpha\| \ \|_1 \leq \| \ \|_\infty \leq \beta\| \ \|_1$.

Exercice 9. Soient E, F deux e.v.n. et $A_n, A \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence entre :

$A_n \to A$ dans $\mathcal{L}(E,F)$.

$A_n \to A$ uniformément sur toute partie bornée de E.

Exercice 10. Soit $E = C([0,1])$, $\mu(x) = \int_0^1 x(t)\ dt$, $\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x(\frac{k}{n})$.

a) Calculer $|||\mu|||$ et $|||\mu_n|||$.

b) Montrer que $\mu_n(x)$ converge vers $\mu(x)$ pour tout x dans E, mais que $|||\mu - \mu_n||| = 2$.

Exercice 11. Montrer qu'un e.v.n. est complet si et seulement si sa sphère unité est complète.

Exercice 12. Soient E un espace normé et F un espace de Banach. (Re-)démontrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi un espace de Banach.

a) (Première méthode) Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$. Vérifier que pour tout $x \in E$, $(T_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F. En déduire qu'elle converge. Noter $T(x)$ sa limite. Vérifier que T est linéaire, puis montrer que $|||T_n - T||| \to 0$.

b) (Seconde méthode) Soit B la boule unité de E. Vérifier que l'application $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{B}(B,F)$ est linéaire et préserve la norme, et que son image est fermée. Conclure.

Exercice 13. Soit E un Banach, A,B deux sous-espaces de E tels que $A \cap B = \{0\}$, A étant fermé et B de dimension finie.

a) Pour $b \in B$, on définit $[b] = d(b, A) = \inf_{a\in A} ||a + b||$. Vérifier que $[.]$ est une norme sur B.

b) En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que $||a + b|| \geq C||b||$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$.

c) Montrer que $A \oplus B$ est encore un sous-espace fermé de E.