Licence de mathématiques fondamentales - TOPOLOGIE
T.D. de soutien des 26 et 27/11/07 : complétude, point fixe, (sous-)recouvrements

Corrigé de la fin de la séance 3 (exercice 20.b) : H_k est toujours borné car tous ses points sont à distance $\leq k+\sqrt{2}$ de l'origine O. Il n'est jamais ouvert car pas voisinage de $(1,1)(1+k/\sqrt{2}) \in H_{k,1}$ (son point le plus éloigné de O). O est limite des centres donc appartient à l'adhérence de H_k, pourtant lorsque $k<\sqrt{2}$, O n'appartient à aucun $H_{k,n}$ donc $O \notin H_k$. Donc si $k<\sqrt{2}$, H_k n'est pas fermé. Par contre si $k \geq \sqrt{2}$ alors la suite des disques est décroissante donc $H_k = H_{k,1}$ donc H_k est fermé.
Trois remarques :

- H_k est une réunion dénombrable de bornés (les $H_{k,n}$) mais cela ne suffit pas pour prouver que H_k est borné ! (contre-exemple dans R : N).
- Dans le cas $k<\sqrt{2}$, à partir d'un certain rang (qu'on peut calculer) $H_{k,n}$ et $H_{k,n+1}$ s'intersectent, donc H_k n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.
- Toujours dans le cas $k<\sqrt{2}$, O est le seul point de $\overline{H_k}$ qui n'appartient pas à H_k, car si une suite $M_n \in H_k$ converge vers un $M \neq O$, il existe N tel qu'à partir d'un certain rang, M_n prenne ses valeurs dans $K := \cup_{n<N} H_{k,n}$ (exo : pourquoi ?), d'où $M \in K$, d'où $M \in H_k$.

Exercice 1. Soient (E,d) un espace métrique, X un ensemble, et $I : X \to E$ une injection. On pose $\delta(x,y) = d(I(x),I(y))$.

a) Vérifier que δ est une distance et que (X,δ) est isométrique à $(I(X),d)$.

b) Montrer que (X,δ) est complet ssi $(I(X),d)$ l'est.

c) Application : pour $x,y>0$ on pose $\delta(x,y) = |1/x - 1/y|$. Montrer que δ est une distance sur $]0,+\infty[$. Quelle est la topologie associée ? Pour δ, $]0,+\infty[$ est-il complet ? et $]0,1]$? En déduire que la complétude n'est pas une notion topologique.

Exercice 2. Soit E un espace métrique. Montrer que toute intersection de parties complètes de E est comlète. Montrer que toute union finie de parties complètes de E est complète. Quid d'une union infinie ?

Exercice 3. Soient X,Y deux espaces métriques tels qu'il existe une bijection $f : X \to Y$ uniformément continue et d'inverse continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.

Exercice 4. Soient E complet et $A,B : E \to E$ deux contractions qui commutent. Montrer que A,B admettent un (unique) point fixe commun. (Peut-on affaiblir les hypothèses ?)

Exercice 5. Soient E un espace de Banach (i.e. un espace vectoriel normé, complet pour la distance associée à la norme) et $f : E \to E$ K-lischitzienne. Montrer que si $|\lambda| > K$, l'équation $f(x) + \lambda x = a$ admet, pour tout $a \in E$, une unique solution x.

Exercice 6. Construire une application $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}([0,1])$ telle que les solutions $f : [0,1] \to$ R de $f(0)=1$ et $f'(x) = f(x-x^2)$ soient exactement les points fixes de T, puis montrer que $T \circ T$ est une contraction (pour la norme usuelle sur $\mathcal{C}([0,1])$). Qu'en déduit-on ?

Exercice 7. Démontrer qu'un ensemble X muni de la topologie discrète $\mathcal{P}(X)$ est compact ssi X est fini.

Exercice 8. Soient A, B deux sous-ensembles d'un espace topologique séparé X.

a) (Re-) démontrer que A est compact (pour la topologie induite) ssi pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X telle que $A \subset \cup_{i\in I} U_i$, il existe un sous-ensemble fini d'indices, $J \subset I$, tel que $A \subset \cup_{i\in J} U_i$.

b) (Re-) démontrer que si A et B sont compacts alors $A \cup B$ aussi.

Exercice 9. Soit X un espace topologique. Démontrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes, puis montrer que pour $X = \mathrm{R}$ ou $X = \mathrm{Q}$ (munis de leur topologie usuelle) ces propriétés ne sont pas vérifiées.
Indication pour b)$\Leftrightarrow$c) : x est une valeurs d'adhérence de (x_n) ssi tout voisinage de x contient des x_n pour une infinité de valeurs de n, et ceci équivaut (exercice) à $x \in \cap_{n\in\mathrm{N}} \overline{X_n}$, où $X_n = \{x_k \mid k \geq n\}$)
(Remarque : par définition X compact $\Rightarrow$ a), et d'après le cours, si X est métrisable la réciproque est vraie).

a) Tout recouvrement *dénombrable* de X par des ouverts admet un sous-recouvrement fini

b) L'intersection de toute suite décroissante de fermés non vides de X est non vide

c) Toute suite (x_n) dans X a une valeur d'adhérence.

Exercice 10. (Choquet 40 p.110) Soient E un espace topologique séparé et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de E. Montrer que E est compact si et seulement si tout recouvrement de E par des éléments de $\mathcal{B}$ admet un sous-recouvrement fini.

Exercice 11. (Choquet p.39) (Re-) démontrer qu'un produit de deux espaces topologiques compacts est compact. Indications (en utilisant l'exercice précédent). Soient $E = X \times Y$ avec X, Y compacts, et $(O_i = U_i \times V_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts élémentaires recouvrant E.

a) Montrer que pour tout $z = (x, y) \in E$ il existe (au moins) un $i(z) \in I$ tel que $x \in U_{i(z)}$ et $y \in V_{i(z)}$.

b) Montrer que pour $x \in X$ fixé, il existe $B(x)$ fini inclus dans Y tel que les $V_{i(x,b)}$ quand b varie dans $B(x)$ recouvrent Y.

c) On pose $W_x = \cap_{b\in B(x)} U_{i(x,b)}$. Montrer qu'il existe A fini inclus dans X tel que $X = \cup_{a\in A} W_a$.

d) Soit C l'ensemble des couples $c = (a, b)$ tels que $a \in A$ et $b \in B(a)$. Montrer que C est fini et que $E \subset \cup_{c\in C} O_{i(c)}$. Conclure.