**Licence de mathématiques fondamentales - TOPOLOGIE**
**Cours de soutien du 08/10/07 : suites et parties de** $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$

§0 **Un retour sur la séance 1 du 01/10** : Equivalence entre deux formulations de l'axiome du choix.

AC1 (donnée en soutien le 01/10) Pour tous ensembles $A, B$ et toute surjection $g : B \to A$ il existe une application $f : A \to B$ telle que $g \circ f = id_A$.

AC2 (donnée en intégration) Pour tout ensemble $E$ il existe une "fonction de choix" $\varphi : \mathcal{P}(E) \backslash \{\emptyset\} \to E$ qui à chaque partie non vide de $E$ associe l'un de ses éléments.

$AC2 \Rightarrow AC1$ en appliquant $AC2$ à $E = A$ et en définissant $f$ par $f(a) = \varphi(g^{-1}(\{a\}))$. $AC1 \Rightarrow AC2$ en appliquant $AC1$ à $A = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, $B = \{(x, X) \in E \times \mathcal{P}(E) \mid x \in X\}$, $g(x, X) = X$, et en définissant $\varphi$ par $\varphi(X) =$ la première composante du couple $f(X) \in B$ (comme $g \circ f = id_A$, la seconde composante de $f(X)$ est $X$, donc $f(X) = (\varphi(X), X) \in B$, donc $\varphi(X) \in X$).

---

La plupart des exercices ci-dessous sont extraits du site web d'Arnaud Bodin (http://math.univ-lille1.fr/~bodin/exercice.html).
Ceux marqués d'un (*) seront traités prioritairement, faute de temps.

§1 **Manipulations ensemblistes et logiques**

**Exercice 1.** (*) Simplifier l'écriture des deux ensembles suivants
$I = \cup_{n \geq 2}[1/n, 1 - 1/n]$, $J = \cap_{i,j>0}] - 1/i, 1 + 1/j[$.

**Exercice 2.** Faire les exercices 1 et 2 des annales.

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq -2$, $f(x) = 1 + x$ si $-2 < x < 0$, $f(x) = x$ si $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 1$ si $x > 1$. Soient $A = [-1, 0[$ et $B = [0, 2[$. Déterminer $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f(\mathbb{R} \setminus A)$, $f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B))$, $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

**Exercice 4.** (*) Montrer (par un contre-exemple de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) que l'image par une application continue d'un fermé n'est pas nécessairement un fermé. Idem en remplaçant fermé par ouvert.

**Exercice 5.** (*) Soient $f$ et $g$ deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

a) $f$ est majorée

b) $f$ est bornée

c) $f$ ne s'annule jamais

d) $f$ est différente de la fonction nulle

e) $f$ est strictement décroissante

f) $f$ n'est pas croissante

g) $f$ ne prend pas deux fois la même valeur

h) $f$ prend toutes les valeurs entières

i) $f$ est inférieure à $g$

j) $f$ n'est pas supérieure à $g$.

**Exercice 6.** (*) Etant donnée une partie $A$ de $\mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

a) 10 est un majorant de $A$,

b) $m$ est un minorant de $A$,

c) $P$ n'est pas un majorant de $A$,

d) $A$ est majoré,

e) $A$ n'est pas minoré,

f) $A$ est borné,

g) $A$ n'est pas borné.

**Exercice 7.** (*) Soient $x$ une suite réelle et $\ell \in \mathrm{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) $\forall \epsilon \in ]0, +\infty[, \exists N \in \mathrm{N}, \forall n > N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$,

b) $\forall \epsilon \in ]0, \pi[, \exists N \in \mathrm{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \epsilon$,

c) $\forall k \in \mathrm{N}^*, \exists A \in \mathrm{R}, \forall n \geq A, |u_n - \ell| \leq 1/k$.

---

## §2 Borne sup, borne inf

**Exercice 8.** Soient $A$ une partie quelconque de R et $M$ un réel. On rappelle que l'adhérence $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites à valeurs dans $A$ qui convergent. Montrer que $M = \sup(A)$ si et seulement si $M$ est un majorant de $A$ et $M \in \overline{A}$.

**Exercice 9.** Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, inférieure, le plus grand élement, le plus petit, pour les ensembles
$[0,1] \cap \mathrm{Q}$, $]0,1[ \cap \mathrm{Q}$, N, $\{(-1)^n + 1/n \mid n \in \mathrm{N}^*\}$, $\{\frac{n-1/n}{n+1/n} \mid n \in \mathrm{N}^*\}$.

**Exercice 10.** (*) Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément dans D, dans Q, dans R (si la question se pose) ? $[0,3[$, $\{0\} \cup ]1,2]$, $\mathrm{D} \cap [0,1/3]$, $\{x \in \mathrm{R} \mid \exists n \in \mathrm{N}, xn = 1\}$, $\{x \in \mathrm{Q} \mid x^2 \leq 2\}$

**Exercice 11.** Soit $A$ une partie non vide et bornée de R. Montrer que son diamètre (qui est par définition $\sup_{x,y \in A} |x - y|$) est égal à $\sup(A) - \inf(A)$.

**Exercice 12.** (*)

a) Soient $A, B$ deux parties non vides et majorées de R. On rappelle que $A + B$ désigne l'image, par l'application $+ : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, de l'ensemble $A \times B$. Montrer que $\sup(A + B)$ existe et est égal à $\sup(A) + \sup(B)$.

b) Soient $X$ un ensemble non vide et $f, g : X \to \mathrm{R}$ deux fonctions majorées. Comparer $\sup(f + g)$ et $\sup(f) + \sup(g)$.

**Exercice 13.**

a) Soient $A, B$ deux parties non vides de R telles que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. Que peut-on prouver sur $\sup(A)$ et $\inf(B)$ ?

b) Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille non vide et bornée de réels. Comparer $\inf_{i \in I}(\sup_{j \in J} a_{i,j})$ avec $\sup_{j \in J}(\inf_{i \in I} a_{i,j})$.

---

## §3 Suites

**Exercice 14.** (*) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

a) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang ?

b) Soit $x$ une suite de limite $\ell$. On a $\ell > 0$ si et seulement si tous les $x_n$ sont $> 0$ à partir d'un certain rang ?

c) Toute suite positive non majorée tend vers $+\infty$ ?

d) Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire ?

e) Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée ?

f) Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée ?

g) Une suite $x$ converge si et seulement si $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0 ?

**Exercice 15.** Soient $a$ une suite réelle, $adh(a)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérences et $A = \{a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$. On rappelle que l'adhérence $\overline{A}$ est l'union disjointe de l'ensemble $A'$ des points d'accumulation de $A$ et de l'ensemble $Is(A)$ des points isolés de $A$, et (cf devoir 1) que $adh(a) \subset \overline{A}$.

a) Démontrer que $x \in A' \Leftrightarrow x$ est limite d'une sous-suite de $a$ à valeurs différentes de $x$ (donc $A' \subset adh(a)$).

b) Démontrer que $x \in Is(A) \cap adh(a) \Leftrightarrow$ la suite $a$ prend la valeur $x$ une infinité de fois, et les sous-suites de $a$ qui convergent vers $x$ sont stationnaires.

c) Donner un exemple de suite $a$ pour laquelle les trois ensembles $A'$, $Is(A) \cap adh(a)$ et $Is(A) \setminus adh(a)$ sont non vides.

**Exercice 16.** (*) Soit $x$ une suite réelle.

a) Montrer que si $\forall k \geq 2$, $(x_{nk})_{n\in\mathrm{N}}$ converge alors toutes ces sous-suites convergent vers une même limite.

b) Montrer que si pour tout $p$ premier, $\lim_{n\to+\infty} x_{np} = 0$ alors $\forall k \geq 2$, $\lim_{n\to+\infty} x_{nk} = 0$.

c) Construire un exemple d'une telle suite $x$ qui soit cependant divergente.

**Exercice 17.** (*) Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{N}\times\mathrm{N}}$ une "double suite" à valeurs réelles.
On dit que $\lim_{i,j\to+\infty} x_{i,j} = \ell$ si et seulement si $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathrm{N}, \forall i,j \geq N, |x_{i,j} - \ell| < \epsilon$.

a) Montrer que si $\lim_{i,j\to+\infty} x_{i,j} = \ell$ et si $\forall i, \lim_{j\to+\infty} x_{i,j} = \ell_i$ alors $\lim_{i\to+\infty} \ell_i = \ell$, mais que la seconde hypothèse n'est pas conséquence de la première (considérer $(-1)^j/i$).

b) Montrer que $\lim_{i\to+\infty}(\lim_{j\to+\infty} x_{i,j}) = \ell \not\Rightarrow \lim_{i,j\to+\infty} x_{i,j} = \ell$ (considérer $i/j$, dont tout réel $\geq 0$ est valeur d'adhérence).

**Exercice 18.** Rappel : une suite réelle $x$ est dite de Cauchy lorsque $\lim_{p,q\to+\infty} x_p - x_q = 0$.

a) Montrer que si $x$ est de Cauchy alors $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ mais que la réciproque est fausse.

b) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy. On sait que dans R la réciproque est vraie, mais démontrer les questions suivantes sans l'utiliser.

c) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

d) Montrer que si $x$ est de Cauchy et admet une sous-suite convergente alors $x$ converge.

e) Montrer que si une suite $y$ vérifie $\forall p \in \mathrm{N}, \forall q \geq p, |y_p - y_q| \leq 1/2^p$ alors $y$ est de Cauchy.

f) Montrer que si $x$ est de Cauchy, elle admet une sous-suite $x_{\varphi(n)} = y_n$ vérifiant la condition précédente.

§4 **Intérieur, adhérence**

**Exercice 19.** Montrer que les parties suivantes sont denses dans R :

a) $\{\frac{a}{2^k} \mid (a,k) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{N}\}$ (calculer, pour tout réel $x$, la limite de $E(2^k x)/2^k$),

b) Q,  c) $\{r^3 \mid r \in \mathrm{Q}\}$.

**Exercice 20.** (*) Dans $\mathrm{R}^2$,

a) représenter graphiquement les parties suivantes et déterminer leurs adhérences et intérieurs.
$A_1 = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid |x| \neq 1, |y| \neq 1\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid |x| = 1, |y| \neq 1\}$,
$A_3 = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid |x| \neq 1 \text{ ou } |y| \neq 1\}$, $B_1 = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid xy > 1\}$,
$B_2 = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid xy = 1\}$, $C = \{1/n \mid n \in \mathrm{N}^*\} \times [0,1]$,
$D = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, (x-1)^2 + y^2 > 1\}$,

b) les sous-ensembles suivants de $\mathrm{R}^2$ sont-ils ouverts ? sont-ils fermés ? sont-ils bornés ?
$E = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid x^2 - \sin y \leq 4\}$, $F = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\}$,
$G = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid \cos x \geq 0\}$, et pour $k \in \mathrm{R}_+^*$, $H_k = \cup_{n \in \mathrm{N}^*} H_{k,n}$ où $H_{k,n}$ est le disque fermé de centre $(1/n, 1/n)$ et de rayon $k/n$.

---

§5 **Exercices plus difficiles**

**Exercice 21.** Pour $x \in \mathrm{R}^n$ on pose $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ si $p \in ]0, +\infty[$ et $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

a) On sait que pour $p \in [1, +\infty]$, $\| \|_p$ est une norme sur $\mathrm{R}^n$, c'est-à-dire vérifie quelles propriétés ? (c'est en fait la norme $L^p$ associée à quel espace mesuré ?)

b) Démontrer que pour toute norme, la boule unité $B$ est convexe
(c'est-à-dire $\forall x, y \in B, \forall t \in [0,1], tx + (1-t)y \in B$).

c) Dessiner les boules unités de $\mathrm{R}^2$ correspondant à $p = \infty$, $p = 2$, $p = 1$, $p = 1/2$.

d) Pourquoi $\| \|_p$ n'est-elle pas une norme si $p < 1$ ?

e) Démontrer que $p \leq q \Rightarrow \| \|_p \leq \| \|_q n^{1/p - 1/q}$ (utiliser Hölder : $1/p = 1/q + 1/r \Rightarrow \|fg\|_p \leq \|f\|_q \|g\|_r$) et $\| \|_q \leq \| \|_p$.

**Exercice 22.** Soit $x$ une suite réelle convergeant vers $\ell$ et $\varphi$ une bijection de N sur N (pas nécessairement strictement croissante !). Montrer que $\lim_{n \to \infty} x_{\varphi(n)} = \ell$.

**Exercice 23.** Soit $x$ n'importe quelle suite réelle prenant toutes les valeurs rationnelles (au fait, comment en construire une ?). Montrer qu'une telle suite n'admet pas de limite.

**Exercice 24.** Soient $u, v$ deux suites réelles de limite $+\infty$, avec $\lim_{n \to \infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que $\{u_n - v_m \mid n, m \in \mathrm{N}\}$ est dense dans R. (Indications : soit $x < y$, montrer qu'il existe un rang $N$ à partir duquel $u_{n+1} - u_n < y - x$, puis qu'il existe $M$ tel que $u_N - v_M < x$, puis qu'il existe $n$ tel que $x < u_n - v_M < y$).

**Exercice 25.** Soit $A$ l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle $x$ (donc $A$ fermé).

a) Montrer que si $x$ est bornée, $A$ est non vide et borné.

b) Si $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f$ continue, montrer que les points de $A$ sont fixes par $f$.

c) Si $\lim_{n \to \infty} x_{n+1} - x_n = 0$, montrer que $A$ est un intervalle.

d) Que peut-on déduire si $x$ vérifie à la fois les hypothèses de a,b,c ?

**Exercice 26.** Soit $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ bornée, de graphe fermé. Montrer que $f$ est continue.