U.P.S. - Licence de mathématiques fondamentales - TOPOLOGIE
Partiel du 31 octobre 2007 (durée : 2 heures)

Question de cours. Soit F une partie d'un espace métrique E. Démontrer que

a) F est complète $\Rightarrow$ F est fermée,

b) E est complet et F est fermée $\Rightarrow$ F est complète.

Exercice 1. [Support d'une fonction continue]
(Les trois questions sont indépendantes). Soit S une partie d'un espace topologique E. On va comparer les trois propriétés suivantes :

i) $S = \overline{\mathring{S}}$

ii) il existe un ouvert Ω tel que $S = \overline{\Omega}$

iii) il existe une fonction continue $f : E \to \mathrm{R}$ dont S est le "support fermé", c'est-à-dire telle que $S = \overline{\Omega}_f$, avec $\Omega_f = \{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$.

a) Montrer que i) $\Leftrightarrow$ ii).

b) Montrer que iii) $\Rightarrow$ ii).

c) Montrer que si E est métrisable : ii) $\Rightarrow$ iii).

Exercice 2. [Prolongement k-lipschitzien]
Soient (X, d) un espace métrique, Y une partie non vide de X et $f : Y \to \mathrm{R}$ une application k-lipschitzienne (i.e. telle que $\forall x, y \in Y, |f(x) - f(y)| \leq kd(x, y)$). Pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, on pose

$$f_y(x) = f(y) + kd(x, y).$$

a) Montrer que pour $x \in X$ fixé, l'ensemble $\{f_y(x) \mid y \in Y\}$ est minoré (par $f(z) - kd(z, x)$, pour n'importe quel $z \in Y$). On note $g(x)$ la borne inférieure de cet ensemble.

b) Vérifier que lorsque $x \in Y$, $g(x) = f(x)$.

c) Montrer que $g : X \to \mathrm{R}$ est k-lipschitzienne.

d) Déduire de ce qui précède l'existence d'un prolongement continu de f à X ; montrer que si Y est dense dans X, un tel prolongement est unique.

Exercice 3. [Parties de R^4]
($M_2(\mathrm{R})$ est identifié à R^4 muni de sa topologie usuelle)

a) Montrer que l'ensemble $GL_2(\mathrm{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense de $M_2(\mathrm{R})$.

b) Dans $M_2(\mathrm{R})$, dire pour chacun des deux ensembles suivants (en justifiant votre réponse) d'une part s'il est ouvert, d'autre part s'il est fermé :

> $\mathcal{A}$ = l'ensemble des matrices ayant deux valeurs propres réelles strictement positives distinctes,
>
> $\mathcal{B}$ = l'ensemble des matrices ayant deux valeurs propres réelles strictement positives.

c) Dans $GL_2(\mathrm{R})$ (muni de la topologie induite), même question.

On vérifiera au préalable que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont inclus dans $GL_2(\mathrm{R})$.

Barème indicatif : 4+5+5+6.