LICENCE DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Topologie - Examen du 22 janvier 2008

durée 3 heures - (*résumé de cours autorisé*).

Question de cours. Démontrer que l'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espace séparé est un compact.

Exercice I. On dit qu'un espace topologique non vide X possède la propriété du point fixe si toute application continue de X dans X possède (au moins) un point fixe.
1. Montrer qu'un espace possédant la propriété du point fixe est nécessairement connexe.
2. (a) Montrer que tout segment (= intervalle compact) de $\mathbb{R}$ possède la propriété du point fixe, mais que ni l'intervalle $[0,+\infty[$ ni le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$ ne la possèdent.
(b) Donner deux preuves de la non homéomorphie du cercle $\mathbb{S}^1$ et d'un segment de $\mathbb{R}$.

Exercice II. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé non-nul. Soit K une partie compacte de E de cardinal supérieur ou égal à 2. On note $D = diam(K) = \sup\{\| x - y \|, (x,y) \in K^2\}$. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des parties P de K telles que, pour tous $(x,y) \in P^2$, $x \neq y \Longrightarrow \| x - y \| = D$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathscr{P}$ de cardinal au moins égal à 2.
2. Justifier l'existence d'un recouvrement fini de K par des boules ouvertes de rayon $\frac{D}{2}$. Soit N le cardinal d'un tel recouvrement. Comparer $card(P)$ et N, pour tout $P \in \mathscr{P}$.
3. Prouver l'existence d'un élément $P \in \mathscr{P}$ maximal pour l'inclusion.
4. On suppose de plus que K est convexe. Soit $P \in \mathscr{P}$ maximal pour l'inclusion, et N son cardinal. Prouver que l'élément $h = \frac{1}{N}\sum_{x\in P} x$ appartient à K et vérifie : pour tout $x \in K$, $\| h - x \| < D$.

Exercice III. Les espaces $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{C})$ des suites complexes bornées, $c_0 = c_0(\mathbb{C})$ des suites complexes convergeant vers 0 sont munis de la norme sup : $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. L'espace $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{C})$ des suites complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général x_n soit absolument convergente est muni de sa norme usuelle $||x||_1 = \sum_{n=0}^\infty |x_n|$.
E est l'espace des suites complexes nulles à partir d'un certain rang.
On pourra utiliser sans preuve les résultats suivants : pour $p = 1$ et $p = \infty$, $(\ell^p, ||.||_p)$ est un Banach ; ℓ^∞ n'est pas séparable.

1. (a) Démontrer que c_0 est complet. Montrer que l'adhérence de E dans ℓ^∞ est égale à c_0, que E est dense dans ℓ^1.
(b) On note $e^k = (\delta_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $k \in \mathbb{N}$, et D l'ensemble des combinaisons linéaires des e^k à coefficients dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Montrer que D est dense dans $(E, ||.||_\infty)$ et dense dans $(E, ||.||_1)$.
(c) Montrer que ℓ^1 et c_0 sont séparables.
2. Dans cette question E est muni de la norme sup.
(a) Montrer que l'application linéaire $f : x \in (E, ||.||_\infty) \mapsto \sum_{n=0}^\infty x_n \in \mathbb{C}$ n'est pas continue.
(b) Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes ; on considère l'application bilinéaire $G : (x,y) \in E \times E \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n x_n y_n$; montrer que
- G est séparément continue par rapport à chaque variable
- G est continue ssi la série de terme général a_n est absolument convergente.
3. Soit $\alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$; on pose pour toute suite $x \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$: $T_\alpha(x) = (\alpha_n x_n)_n$.
Les espaces ℓ^∞, c_0 et ℓ^1 sont stables par T_α ; on notera par T_α, indifféremment, les endomorphismes induits par T_α sur ces espaces.
(a) Montrer, pour chacun des e.v.n X suivants $X = \ell^\infty$, c_0 ou ℓ^1, que T_α est (linéaire) continu sur X de norme $||T_\alpha||_{\mathscr{L}(X)} = ||\alpha||_\infty$ (où $\mathscr{L}(X)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans X).
En déduire que chacun des espaces $\mathscr{L}(\ell^\infty)$, $\mathscr{L}(\ell^1)$, $\mathscr{L}(c_0)$ contient un sous-espace isométrique à ℓ^∞.
(b) Montrer qu'un espace métrique Y est séparable si (et –BONUS– seulement si) il possède une base dénombrable d'ouverts (i.e. une famille $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts telle que tout ouvert de Y soit une union d'ouverts ω_n).
Déduire du (a) que les espaces $\mathscr{L}(\ell^\infty)$, $\mathscr{L}(\ell^1)$ et $\mathscr{L}(c_0)$ ne sont pas séparables.

BARÈME : question de cours : 2 (3 ?) - I : 4 (5 ?) - II : 5 (6 ?) - III : 8 (7 ?).