U.P.S. - Licence de mathématiques fondamentales - TOPOLOGIE
Corrigé de l'examen du 22 janvier 2008

Question de cours Soient X compact, Y séparé et $f : X \to Y$ continue. D'abord $f(X)$ est séparé, comme sous-espace d'un séparé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant $f(X)$, i.e. $U_i = f(X) \cap V_i$ avec V_i ouverts de Y et $f(X) \subset \cup_{i\in I} U_i$. Posons $W_i = f^{-1}(V_i)$. Alors les W_i recouvrent X et (par continuité de f) sont des ouverts de X, donc (par compacité de X) il existe J fini $\subset I$ tel que $X = \cup_{i\in J} W_i$, d'où $f(X) = \cup_{i\in J} f(W_i) = \cup_{i\in J} V_i$. Donc $f(X)$ est compact.

Exercice I.

1) Soit X non connexe, il existe dans X deux ouverts non vides complémentaires U, V. Soient $u \in U, v \in V$, et $f : X \to X$ définie par $f(U) = \{v\}$ et $f(V) = \{u\}$. Alors f est continue sans point fixe.

2.a) Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue, posons $g(x) = f(x) - x$. Alors $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue, $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$, donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, i.e. $f(c) = c$. Les applications $[0, +\infty[\to [0, +\infty[, x \mapsto x + 1$ et $S^1 \to S^1, z \mapsto -z$ sont continues sans point fixe.

2.b) D'après a), $[a, b]$ et S^1 ne sont pas homéomorphes. Autre preuve : S^1 privé de n'importe lequel de ses points est homéomorphe à $]0, 2\pi[$ donc connexe, tandis que $[a, b]$ privé d'un point différent de a, b est non connexe.

Exercice II.

1) L'application $K^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$ est continue sur le compact K^2, donc atteint son sup D (qui est > 0 puisque K a au moins deux éléments). Il existe donc $a, b \in K$ tels que $d(a, b) = D$ (ce qui implique $a \neq b$). Soit $P = \{a, b\}$, alors $P \in \mathcal{P}$.

2) K est précompact donc il existe $x_1, \ldots, x_N$ tel que les boules ouvertes B_i de centres x_i et de rayon $D/2$ recouvrent K. Soit $P \in \mathcal{P}$. Chaque B_i contient au plus un point de P, et tout point de P est dans au moins un B_i, donc $\mathrm{card}(P) \leq N$.

3) La partie de $\mathbf{N}$ $\{\mathrm{card} P \mid P \in \mathcal{P}\}$ est non vide (d'après 1)) et majorée (d'après 2)) donc admet un plus grand élément, noté N. Soit P un élément de $\mathcal{P}$ de cardinal N, alors P est un élément de $\mathcal{P}$ maximal pour l'inclusion.

4) $P \subset K$ et K est convexe, donc $h \in K$. Pour tout $y \in K, d(y, h) \leq \frac{1}{N} \sum_{x\in P} d(x, h)$. Chacun de ces $d(x, h)$ est $\leq D$, et l'un au moins est $< D$, sinon on aurait $y \notin P$ et $P \cup \{y\} \in \mathcal{P}$ donc P ne serait pas maximal. On a donc $d(y, h) < D$.

Exercice III.

1.a) c_0 est complet car fermé dans le complet ℓ^∞, car si $x^{(k)} \in c_0$ et $\|x^{(k)} - x\|_\infty \to 0$ alors $x \in c_0$, puisque pour tout $\varepsilon > 0$, soient k tel que $\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et pour ce k, soit N tel que $\forall n \geq N, |x_n^{(k)}| \leq \varepsilon/2$, on a alors $\forall n \geq N, |x_n| \leq \varepsilon$.
Dans ℓ^∞, puisque c_0 est fermé et contient E, il contient son adhérence. Réciproquement tout $x \in c_0$ est limite pour $\| \ \|_\infty$ d'une suite d'éléments $x^{(k)}$ de E, puisqu'en posant $x_n^{(k)} = x_n$ si $n \leq k$ et 0 si $n > k$ on a bien $x^{(k)} \in E$ et $\|x^{(k)} - x\|_\infty =$

$\sup_{n>k} |x_n| \to 0$.

Si x appartient non seulement à c_0 mais à ℓ^1, on a même $\|x^{(k)} - x\|_1 = \sum_{n>k} |x_n| \to 0$.

1.b) Notons E_K le s.e.v. de E engendré par les e^k pour $k < K$. Alors dans E_K (qui muni de $\| \; \|_\infty$ ou $\| \; \|_1$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^{2K}$ muni de sa topologie usuelle), $D \cap E_K$ est dense, puisque dans $\mathbf{R}^{2K}$, $\mathbf{Q}^{2K}$ est dense. Donc dans ℓ^∞ comme dans ℓ^1, l'adhérence de D contient $\cup_{K\in\mathbf{N}} E_K = E$.

c) D est dénombrable (comme union dénombrable des dénombrables $D \cap E_K \simeq \mathbf{Q}^{2K}$), et (d'après a) et b)) est dense dans c_0 et ℓ^1.

2.a) Soit $x^k = \sum_{n=0}^k e^n$, alors $\|x^k\|_\infty = 1$ et $f(x^k) = k + 1 \to \infty$.

2.b) G est symétrique, et pour tout $x \in E$ on a $ax \in E \subset \ell^1$ donc l'application linéaire $G_x : y \mapsto G(x, y)$ est continue de norme $\leq \|ax\|_1$.

Si $a \in \ell^1$, G est continue de norme $\leq \|a\|_1$.

Réciproquement si G est continue de norme $\leq C$, soit $N \in \mathbf{N}$, définissons $x, y \in E$ en posant $x_n = y_n = 0$ pour $n > N$ et en choisissant, pour $n \leq N$, x_n, y_n de module 1 tels que $a_n x_n y_n = |a_n|$: $\sum_{n=0}^N |a_n| = G(x, y) \leq C\|x\|_\infty \|y\|_\infty = C$. On en déduit $\sum_{n=0}^\infty |a_n| \leq C$.

3) (T_α est évidemment linéaire). Pour tout $x \in \ell^\infty$, $\|T_\alpha(x)\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty \|x\|_\infty$ donc T_α est continue de ℓ^∞ dans lui-même, de norme $\leq \|\alpha\|_\infty$, donc idem pour sa restriction de c_0 dans c_0.

Pour tout $x \in \ell^1$, $\|T_\alpha(x)\|_1 \leq \|\alpha\|_\infty \|x\|_1$ donc T_α est continue de ℓ^1 dans lui-même, de norme $\leq \|\alpha\|_\infty$.

Pour $X = c_0$, $|||T_\alpha|||_{\mathcal{L}(X)}$ est en fait exactement égale à $\|\alpha\|_\infty$ (donc pour $X = \ell^\infty$ aussi) car les e^k définis en 1.b appartiennent à c_0, $\|e^k\|_\infty = 1$ et $\sup_{k\in\mathbf{N}} \|T_\alpha(e^k)\|_\infty = \|\alpha\|_\infty$.

Pour $X = \ell^1$, $|||T_\alpha|||_{\mathcal{L}(X)}$ est en fait exactement égale à $\|\alpha\|_\infty$ car $\|e^k\|_1 = 1$ et $\sup_{k\in\mathbf{N}} \|T_\alpha(e^k)\|_1 = \|\alpha\|_\infty$.

Pour chacun de ces trois e.v.n. X, $\{T_\alpha \mid \alpha \in \ell^\infty\}$ est donc un sous-espace de $\mathcal{L}(X)$ isométrique à ℓ^∞ (via l'application $\alpha \mapsto T_\alpha$).

3.b) Si Y possède une base dénombrable d'ouverts $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$, soit A une partie de Y contenant un élément de chaque ω_n non vide. Alors A est dénombrable et dense dans Y (cf annales, exercice 41). Réciproquement (cf annales, exercice 65) si Y contient une partie A dénombrable et dense, Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules $B(a, \frac{1}{n})$ avec $a \in A$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $\mathcal{B}$ est dénombrable et c'est une base d'ouverts de Y car toute boule $B(x, \varepsilon)$ contient un tel $B(a, \frac{1}{n})$ contenant x, i.e. il existe $a \in A$ et $n \in \mathbf{N}^*$ tels que $d(x, a) < 1/n$ et $B(a, 1/n) \subset B(x, \varepsilon)$, car il existe $a \in A$ et $n \in \mathbf{N}^*$ tels que $d(x, a) < 1/n$ et $d(x, a) + 1/n \leq \varepsilon$ (par exemple $n \geq 2/\varepsilon$ puis $a \in A$ t.q. $d(x, a) < \frac{1}{n}$).

Soit $Y = \mathcal{L}(X)$ avec $X = \ell^\infty$, c_0 ou ℓ^1. Alors d'après b), Y contient un sous-espace Z non séparable, donc sans base dénombrable d'ouverts, donc Y est lui-même sans base dénombrable d'ouverts (car pour toute base d'ouverts $\mathcal{B}$ de Y, $\{\omega \cap Z \mid \omega \in \mathcal{B}\}$ est une base d'ouverts de Z, et est (au plus) dénombrable dès que $\mathcal{B}$ l'est), donc Y n'est pas séparable.