Devoir de Topologie

à rendre le 29 Novembre 2007

1 Projection stéréographique

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa topologie naturelle et on considère la sphère unité :

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

avec p le pôle nord ($p = (0, 0, 1)$) et E le plan équateur :

$$E = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

0) Montrer que le plan de l'équateur E est homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^2$.

1) On considère l'application h de $S^2 \backslash \{p\}$ dans le plan E qui à tout point x de $S^2 \backslash \{p\}$ associe le point $h(x)$ intersection de la droite joignant p à x avec le plan E.

Calculer h et h^{-1} (s'aider d'un dessin). Quels sont les points invariants ? En déduire que $S^2 \backslash \{p\}$ et $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes.

Peut-il exister un homéomorphisme entre S^2 et $\mathbb{R}^2$? Le justifier.

2) On veut étendre l'application h, pour cela on rajoute un point à l' "infini" au plan E :

On définit l'ensemble $\overline{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Soit $\mathcal{T}$ la famille d'ensemble formée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ et les ensembles de la forme $\{\infty\} \cup K^c$ où K est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que $(\overline{\mathbb{R}^2}, \mathcal{T})$ est un espace topologique et que pour cette topologie $\overline{\mathbb{R}^2}$ est compact.

Construire à partir de la question 1) un homéomorphisme entre S^2 et $\overline{\mathbb{R}^2}$. Redémontrer que $\overline{\mathbb{R}^2}$ est compact à partir de cet homéomorphisme.

2 Connexité par arcs

Soit E un espace normé. Introduisons les définitions suivantes :

• Une partie A de E est dite *étoilé* s'il existe un point $x \in A$ tel que pour tout point $y \in A$ le segment $[x, y]$ est inclus dans A.

• On dit que $A \subset E$ est *connexe par arcs* si pour tout couple (x, y) de A il existe un chemin γ liant x et y dans A, c'est-à-dire qu'il existe une application continue :

$$\gamma \,:\, [0,1] \longmapsto A,$$

avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

• A est dit *bien enchaîné* si pour tout couple (x, y) de A et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une ϵ-chaîne contenue dans A joignant x et y, c'est-à-dire qu'il existe une suite de points $x_0,\, x_1, \ldots, x_n \in A$ avec :

· $x = x_0,\ y = x_n$,

· $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

1) Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner :
   – un ensemble étoilé non convexe
   – un ensemble connexe par arcs non étoilé
   – un ensemble bien enchaîné et non connexe par arcs

2) Décrire les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$. Remarquer que les notions de connexité par arcs et de convexité coïncident dans ce cadre.

3) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue ; l'épigraphe de f est l'ensemble $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq f(x)\}$. Démontrer que l'épigraphe X est connexe par arcs. A quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) X est-il une partie convexe de $\mathbb{R}^2$?

4) Le graphe de $t \in]0, +\infty[\mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est-il connexe par arcs ? Son adhérence est-elle connexe par arcs ? Bien enchaînée ?

5) Dans un espace normé E, démontrer les affirmations suivantes :
   a) un ensemble convexe est étoilé
   b) un ensemble étoilé est connexe par arcs
   c^*) un ensemble connexe par arcs est bien enchaîné
   d^{**}) une partie compacte et bien enchaînée de E est connexe

6) Application : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application continue injective.
   a) Montrer que $C = \{(x, y) \in I^2 \ / y > x\}$ est connexe par arcs et que la fonction $g : (x, y) \in I^2 \mapsto f(y) - f(x)$ ne s'annule pas sur C.
   b^*) En déduire que f est une application strictement monotone et donc ouverte.