Correction du devoir de Topologie

1 Projection stéréographique

0) Sur le plan E, on considère la topologie trace, c'est-à-dire que les ouverts sont les ensembles de la forme $\mathcal{O} \cap E$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
Pour montrer que E et $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes, regardons l'application :

$$\begin{array}{cccc} p & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1, x_2, 0) & \longmapsto & (x_1, x_2) \end{array}$$

Il s'agit d'une projection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$ restreinte au plan E. Il est clair que p est une bijection de E sur $\mathbb{R}^2$.

Montrons qu'elle est continue. Soit $\mathcal{O}_2$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on a : $p^{-1}(\mathcal{O}_2) = \mathcal{O}_2 \times \{0\}$, ce qui peut encore s'écrire $p^{-1}(\mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_2 \times \mathbb{R}) \cap E$. Par conséquent, $p^{-1}(\mathcal{O}_2)$ est un ouvert de E.

Montrons que son inverse p^{-1} est continue. Soit $\mathcal{O}_1$ un ouvert de E, il s'écrit par définition : $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \cap E$ avec $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^3$. On a alors $p(\mathcal{O}_1)$ qui est la projection de $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{R}^2$, par conséquent (propriété des projections) c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1) Prenons un point x appartenant à la sphère différent de p. La droite joignant x à p s'écrit :

$$D(t) = p + t(x - p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche le point de D qui coupe le plan E, c'est-à-dire que l'on cherche t_0 tel que $D_3(t_0) = 0$. Or :

$$D_3(t_0) = 0 \ \Rightarrow \ 1 + t_0(x_3 - 1) = 0 \ \Rightarrow \ t_0 = -\frac{1}{x_3 - 1}.$$

Le point d'intersection s'écrit alors :

$$h(x) = \left(-\frac{x_1}{x_3 - 1}, -\frac{x_2}{x_3 - 1}, 0 \right)^T.$$

Inversement, si l'on part d'un point $y = (y_1, y_2, 0)$ du plan E, la droite joignant p à y s'écrit de nouveau : $D^*(t) = p + t(y - p)$. On cherche le point que intersecte la sphère, c'est-à-dire que l'on cherche t_* tel que :

$$|D^*(t_*)|^2 = 1,$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{rcl}(t_*y_1)^2+(t_*y_2)^2+(1-t_*)^2 & = & 1\\ \Rightarrow \qquad t_*^2(y_1^2+y_2^2+1)-2t_* & = & 0.\end{array}$$

Donc $t_*=0$ ou $t_*=\frac{2}{y_1^2+y_2^2+1}$. La solution $t_*=0$ correspond au point d'intersection p, il nous faut prendre l'autre solution, c'est-à-dire poser :

$$h^{-1}(y)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{y_1^2+y_2^2+1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{y_1^2+y_2^2+1}\begin{pmatrix}2y_1\\2y_2\\y_1^2+y_2^2-1\end{pmatrix}.$$

(On peut vérifier que $h^{-1}(y)$ est bien de norme 1)

Pour trouver les points invariants, il faut trouver les x tels que : $h(x)=x$. Ceci implique que $x_3=0$. Il est facile de voir que cette condition nécessaire est aussi suffisante. Un point invariant s'écrit donc : $x=(x_1,x_2,0)$. Ce sont les points d'intersection du plan et de la sphère.

Pour montrer que $S^2\backslash\{p\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, on regarde l'application composée :

$$S^2\backslash\{p\}\xrightarrow{h}E\xrightarrow{p}\mathbb{R}^2.$$

On a déjà vu que p était un homéomorphisme. Comme h est une bijection (on a construit h^{-1}) continue (c'est la restriction d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^3\backslash\{p\}$) d'inverse continue on a aussi h homéomorphisme. Par composition de p et h, on a donc $S^2\backslash\{p\}$ et $\mathbb{R}^2$ homéomorphes.

Montrons par l'absurde qu'il ne peut exister d'homéomorphisme entre S^2 et $\mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe $f: S^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ homéomorphisme, en particulier f est surjective et continue. Or S^2 est un compact de $\mathbb{R}^3$ car il est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, S^2 est aussi un compact pour la topologie trace sur S^2. Ainsi on aurait : $\mathbb{R}^2=f(S^2)$ compact car f continue. Mais $\mathbb{R}^2$ n'est pas compact pour sa topologie naturelle, un tel f ne peut donc exister.

2) Montrons que $(\overline{\mathbb{R}^2},\mathcal{T})$ est un espace topologique :

- $\emptyset,\overline{\mathbb{R}^2}\in\mathcal{T}$,
- soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux éléments de $\mathcal{T}$, montrons que leur intersection est encore dans $\mathcal{T}$. Pour cela distinguons trois cas :
  - si $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ alors naturellement leur réunion est encore un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et donc un élément de $\mathcal{T}$.
  - si $\mathcal{O}_1=\{\infty\}\cup K_1^c$ et $\mathcal{O}_2=\{\infty\}\cup K_2^c$ alors :

    $$\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\{\infty\}\cup(K_1^C\cap K_2^C)=\{\infty\}\cup(K_1\cup K_2)^c.$$

    Or l'union finie de compact est encore compact donc on a bien un élément de $\mathcal{T}$.

– si $\mathcal{O}_1$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{O}_2 = \{\infty\} \cup K_2^c$:

$$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \cap \{\infty\}) \cup (\mathcal{O}_1 \cap K_1^C) = \mathcal{O}_1 \cap K_1^C.$$

Or K_1 est un fermé de $\mathbb{R}^2$ donc K_1^C est un ouvert. Ainsi $\mathcal{O}_1 \cap K_1^C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et donc un élément de $\mathcal{T}$.

Par conséquent pour tout $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$, on a bien $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$.

· soit $(\mathcal{O}_k)_{k\in I}$ une suite de $\mathcal{T}$, il faut montrer que la réunion appartient encore à $\mathcal{T}$. Si les $\mathcal{O}_k$ ne sont que des ouverts de $\mathbb{R}^2$, alors la réunion est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et donc un élément de $\mathcal{T}$. Dans le cas contraire, regroupons les éléments de la suite en deux en écrivant :

$$\bigcup_{k\in I} \mathcal{O}_k = \bigcup_{i\in I_1} \mathcal{O}_i \cup \bigcup_{j\in I_2} \mathcal{O}_j,$$

où $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour $i \in I_1$ et $\mathcal{O}_j = \{\infty\} \cup K_j^C$ avec K_j compact de $\mathbb{R}^2$ pour $j \in I_2$. On sait que la réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est encore un ouvert, donc $\mathcal{O}_0 = \cup_{i\in I_1} \mathcal{O}_i$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour l'autre réunion :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j\in I_2} \mathcal{O}_j &= \bigcup_{j\in I_2} \left(\{\infty\} \cup K_j^C\right) = \{\infty\} \cup \bigcup_{j\in I_2} K_j^C \\
&= \{\infty\} \cup \Big(\bigcap_{j\in I_2} K_j\Big)^C \\
&= \{\infty\} \cup K_0^C,
\end{aligned}$$

avec $K_0 = \cap_{j\in I_2} K_j$ compact comme intersection de compacts. On a donc :

$$\bigcup_{k\in I} \mathcal{O}_k = \mathcal{O}_0 \cup \{\infty\} \cup K_0^C.$$

Pour finir, on écrit :

$$\bigcup_{k\in I} \mathcal{O}_k = \{\infty\} \cup (\mathcal{O}_0^C \cap K_0)^C$$

qui est bien un élément de $\mathcal{T}$ car $\mathcal{O}_0^C \cap K_0$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ comme intersection d'un fermé et d'un compact.

Par conséquent la famille $\mathcal{T}$ est bien une topologie sur $\overline{\mathbb{R}^2}$.

Montrons que $\overline{\mathbb{R}^2}$ est compact pour cette topologie.

· Montrons tout d'abord que l'espace est séparé. Soit x et y deux points de $\overline{\mathbb{R}^2}$ distincts. Si x et y appartiennent à $\mathbb{R}^2$, alors comme $\mathbb{R}^2$ est séparé pour sa topologie naturelle il existe deux voisinages séparant x et y[1]. Sinon on a forcément $x \in \mathbb{R}^2$ et $y = \{\infty\}$ (ou inversement $x = \{\infty\}$ et $y \in \mathbb{R}^2$). Dans ce cas posons $V_x = \overline{B}(x, 1)$

[1] prendre par exemple comme voisinage $B(x, \|y - x\|/3)$ et $B(y, \|y - x\|/3)$

voisinage compact de x. On a alors $V_\infty = \{\infty\} \cup V_x^C$ voisinage de $\{\infty\}$ avec de plus : $V_x \cap V_\infty = \emptyset$. Donc V_x et V_∞ sont bien deux voisinages séparant x et $\{\infty\}$. Par conséquent $\overline{\mathbb{R}^2}$ est séparé pour cette topologie.

· Prenons ensuite une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_k)_{k\in I}$ qui recouvre $\overline{\mathbb{R}^2}$:

$$\overline{\mathbb{R}^2} \subset \bigcup_{k\in I} \mathcal{O}_k,$$

et montrons que l'on peut extraire une sous-famille *finie* de $(\mathcal{O}_k)_{k\in I}$ qui recouvre $\overline{\mathbb{R}^2}$.
Comme la famille $(\mathcal{O}_k)_{k\in I}$ recouvre $\overline{\mathbb{R}^2}$, il existe en particulier un k_* tel que $\{\infty\} \in \mathcal{O}_{k_*}$. Donc $\mathcal{O}_{k_*}$ s'écrit $\mathcal{O}_{k_*} = \{\infty\} \cup K_*^C$. Par conséquent $\mathcal{O}_{k_*}$ recouvre tout $\overline{\mathbb{R}^2}$ sauf K_*. Ainsi :

$$K_* \subset \bigcup_{k\in I,\, k\neq k_*} \mathcal{O}_k.$$

Comme K_* est compact[2], on peut extraire une sous-famille finie de ce recouvrement telle que :

$$K_* \subset \bigcup_{k_1,k_2,\cdots,k_n} \mathcal{O}_{k_i}.$$

Ainsi :

$$\overline{\mathbb{R}^2} \subset \bigcup_{k_1,k_2,\cdots,k_n} \mathcal{O}_{k_i} \cup \mathcal{O}_{k_*}.$$

Comme la famille d'ouverts $(\mathcal{O}_k)_{k\in I}$ était quelconque, on a bien $\overline{\mathbb{R}^2}$ compact.

Pour montrer que S^2 et $\overline{\mathbb{R}^2}$ sont homéomorphes, on étend l'application $\widetilde{h}$:

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{h} & : & S^2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}^2} \\ & & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} h(x) & \text{si } x \neq p \\ \infty & \text{si } x = p \end{array} \right. \end{array}$$

L'application $\widetilde{h}$ est clairement une bijection. Pour montrer que $\widetilde{h}$ est un homéomorphisme, montrons d'abord que $\widetilde{h}$ est continue :

· Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\overline{\mathbb{R}^2}$. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors comme h est un homéomorphisme, $\widetilde{h}^{-1}(\mathcal{O}) = h^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $S^2\backslash\{p\}$ et donc de S^2. Si $\mathcal{O} = \{\infty\} \cup K^C$, alors :

$$\begin{array}{rcll} \widetilde{h}^{-1}(\{\infty\} \cup K^C) & = & \widetilde{h}^{-1}(\overline{\mathbb{R}^2}\backslash K) = \widetilde{h}^{-1}(\overline{\mathbb{R}^2})\backslash \widetilde{h}^{-1}(K) & \quad \textit{car } \widetilde{h} \textit{ bijection} \\ & = & S^2\backslash h^{-1}(K). & \end{array}$$

Comme $h^{-1}(K)$ est un fermé, on a bien $\widetilde{h}^{-1}(\mathcal{O})$ ouvert[3].

[2]On peut vérifier facilement qu'un compact de $\mathbb{R}^2$ est encore compact pour la topologie sur $\overline{\mathbb{R}^2}$
[3]Si $\mathcal{O}$ ouvert et F fermé, $\mathcal{O}\backslash F = \mathcal{O} \cap F^C$ ouvert

$\cdot$ Dans l'autre sens, montrons que $\widetilde{h}^{-1}$ est continue. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de S^2. Si $p \notin \mathcal{O}$, $\widetilde{h}(\mathcal{O}) = h(\mathcal{O})$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et donc de $\overline{\mathbb{R}^2}$. Si $p \in \mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(\mathcal{O}) &= \widetilde{h}(S^2 \backslash \mathcal{O}^C) = \widetilde{h}(S^2) \backslash \widetilde{h}(\mathcal{O}^C) \qquad \textit{car } \widetilde{h} \textit{ bijection} \\ &= \overline{\mathbb{R}^2} \backslash h(\mathcal{O}^C). \end{aligned}$$

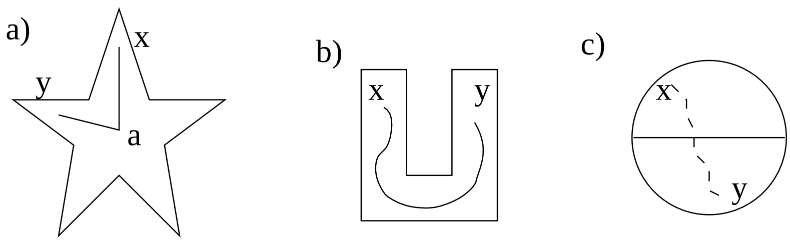
Comme $h(\mathcal{O}^C)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (et donc de $\overline{\mathbb{R}^2}$), on a bien $\widetilde{h}(\mathcal{O})$ ouvert de $\overline{\mathbb{R}^2}$.

On a donc démontré que $\widetilde{h}$ est un homéomorphisme.

On peut alors démontrer grâce à l'homéomorphisme $\widetilde{h}$ que $\overline{\mathbb{R}^2}$ est compact. En effet, S^2 est compact (fermé et borné de $\mathbb{R}^3$ donc compact de $\mathbb{R}^3$ et par conséquent compact pour la topologie trace) et comme $\overline{\mathbb{R}^2} = h(S^2)$ avec h continue, on a $\overline{\mathbb{R}^2}$ compact.

2 Connexité par arcs

1) Dans $\mathbb{R}^2$, exemples d'ensembles :
  a) étoilé et non convexe
  b) connexe par arcs et non étoilé
  c) bien enchaîné et non connexe par arcs : on a privé la boule (ouverte ou fermée) du segment médian, on ne peut donc relier deux points des deux hémisphères par une courbe continue, mais on peut le faire par une ε-chaîne.



2) Dans $\mathbb{R}$, les parties connexes par arcs sont les intervalles :
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Prenons deux points a, $b \in I$. Comme I intervalle, le segment $[a, b]$ est contenu dans I, on peut donc relier a et b par un chemin continu[4]. On a donc bien I connexe par arcs.
- Soit I un ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}$, montrons que I est un intervalle. Soit $a \leq b \in I$ et c tel que $a \leq c \leq b$. Il nous faut montrer que $c \in I$. Comme I est connexe par arcs, il existe γ continu reliant a et b. Or par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $s \in [0, 1]$ tel que $\gamma(s) = c$. Comme γ est contenu dans I, on a $c \in I$. Et donc I intervalle.

[4]si l'on veut être plus explicite, prendre $\gamma(s) = a + s(b - a)$ pour $0 \leq s \leq 1$

3) Pour montrer que l'épigraphe X de f est connexe par arcs, prenons deux points M, N de X et montrons que l'on peut les relier par un chemin. L'idée de la construction est de descendre de M jusqu'au graphe de f, de suivre le graphe puis de remonter à N (voir figure 1).

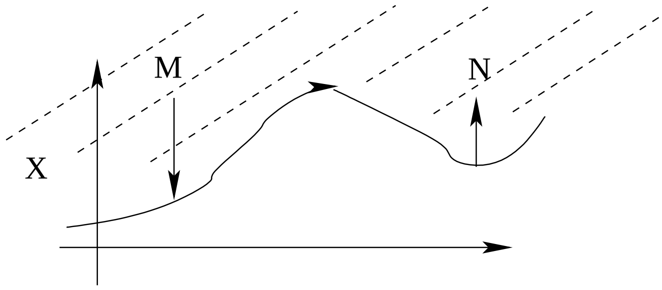


FIG. 1 – Exemple de chemin liant M et N.

Notons $M = (x_1, y_1)$ et $N = (x_2, y_2)$, avec $y_1 \geq f(x_1)$ et $y_2 \geq f(x_2)$ puisque M et N appartiennent à l'épigraphe. Construisons alors 3 chemins, tout d'abord γ_1 qui relie M au graphe de f :

$$\gamma_1(s) = (x_1\ ,\ y_1 + s(f(x_1) - y_1)) \text{ pour } s \in [0, 1],$$

puis γ_2 qui suit le graphe de f jusqu'à $(x_2, f(x_2)$:

$$\gamma_2(s) = (x_1 + s(x_2 - x_1)\ ,\ f(x_1 + s(x_2 - x_1))) \text{ pour } s \in [0, 1],$$

et γ_3 le chemin qui remonte jusqu'à N :

$$\gamma_3(s) = (x_2\ ,\ f(x_2) + s(y_2 - f(x_2)) \text{ pour } s \in [0, 1].$$

Il est clair que ces trois chemins sont dans X et en composant ces trois chemins on récupère bien un chemin continu de M à N, il suffit de prendre :

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_1(3s) & \text{si } s \in [0, 1/3] \\ \gamma_2(3(s - 1/3)) & \text{si } s \in [1/3, 2/3] \\ \gamma_3(3(s - 2/3)) & \text{si } s \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Par conséquent, M et N sont bien reliés par le chemin γ. Comme les points M et N étaient quelconques dans X, on a bien X connexe par arcs.

Pour que l'épigraphe soit convexe, une condition *nécessaire* est que f soit convexe. En effet, prenons $M = (x_1, f(x_1))$ et $N = (x_2, f(x_2))$ deux points de X. Si X est convexe, on a $tM + (1 - t)N \in X$ ou encore par définition de X :

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2).$$

Et donc f convexe.

Dans l'autre sens, si f est convexe, montrons que X l'est aussi (condition *suffisante*). Soit $M=(x_1,y_1)$ et $N=(x_2,y_2)$ deux points de X. Prenons un point du segment $[MN]$:

$$Z \;=\; tM+(1-t)N \;=\; (tx_1+(1-t)x_2\,,\,ty_1+(1-t)y_2)$$

avec $0\le t\le 1$. Montrons que Z appartient à X :

$$\begin{aligned} f(tx_1+(1-t)x_2) &\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \quad \text{car } f \text{ convexe} \\ &\le ty_1+(1-t)y_2 \quad \text{car } M,\,N\in X. \end{aligned}$$

Donc $Z\in X$. Par conséquent, $[MN]\subset X$ et ainsi X convexe.

4) Notons G le graphe de la fonction $t\in]0,+\infty[\longrightarrow \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de la forme (voir figure 2) :

$$G=\{(t,\sin\left(\frac{1}{t}\right)) \text{ avec } 0<t<+\infty\}.$$

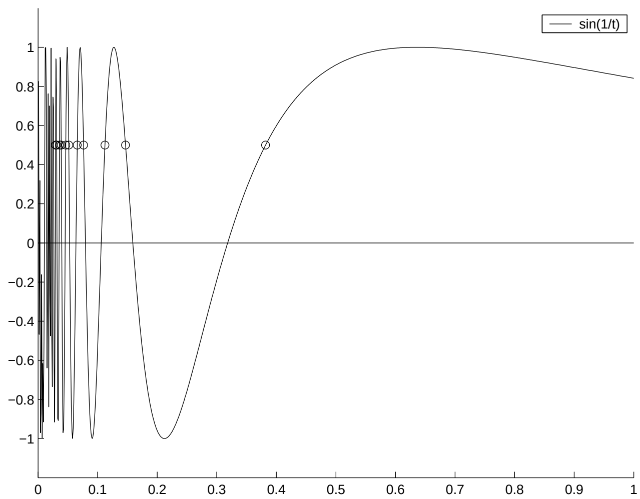


FIG. 2 – Le graphe de $\sin(1/t)$, ainsi qu'une suite de points de G convergeant vers $(0,1/2)$

Il est clair que G est connexe par arcs. En effet, si l'on prend 2 points de G : $M=(t_1,\sin\left(\frac{1}{t_1}\right))$ et $N=(t_2,\sin\left(\frac{1}{t_2}\right))$, on peut les relier dans G par un chemin continu qui suit la courbe du graphe de M à N[5].

Pour voir si l'adhérence de G est connexe par arcs, montrons d'abord que $\overline{G}=G\cup(\{0\}\times[-1,1])$. Il est clair que $\{0\}\times[-1,1]$ est dans l'adhérence de G. En effet,

[5]prendre par exemple $\gamma(s)=(t_1+s(t_2-t_1)\,,\,\sin(\frac{1}{t_1+s(t_2-t_1)}))$

pour $y \in [-1,1]$ on peut construire une suite de points de G qui converge vers $(0,y)$ (voir figure 2)[6]

Dans l'autre sens, si $z = (x,y)$ est dans l'adhérence de G. Soit $(z_n)_n \subset G$ (avec $z_n = (x_n, y_n)$) tel que z_n converge vers z. Comme $x_n \in [0,\infty[$ fermé, on a $x \in [0,\infty[$. Si $x > 0$, alors $z = (x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in G$. Si $x = 0$, alors comme $y_n \in [-1,1]$ fermé, $y \in [-1,1]$ et donc $z \in \{0\} \times [-1,1]$. Dans les deux cas, $z \in G \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Ainsi on a bien : $\overline{G} = G \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Montrons alors que $\overline{G}$ n'est pas connexe par arcs. Prenons par exemple, les points $M = (0,1)$ et $N = (\frac{2}{\pi}, 1)$ appartenant à $\overline{G}$ et montrons que l'on ne peut pas relier ces deux points par un chemin continu dans $\overline{G}$. Raisonnons par l'absurde. Soit γ un chemin continu reliant M et N dans $\overline{G}$. Comme $\gamma \subset \overline{G}$, si on écrit $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, on a :

$$y(s) = \sin\left(\frac{1}{x(s)}\right) \quad \text{si } x(s) > 0.$$

Prenons $s_0 \in [0,1]$ l'instant où $x(s)$ quitte définitivement 0 c'est-à-dire tel que $x(s_0) = 0$ et $x(s) > 0$ pour tout $s > s_0$.[7] On a alors pour tout $s > s_0$:

$$\gamma(s) = \left(x(s), \sin(\frac{1}{x(s)})\right)$$

avec $x(s) \overset{s \to s_0^+}{\longrightarrow} 0$. Or $\sin\left(\frac{1}{x(s)}\right)$ ne converge pas lorsque $s \to s_0^+$ car la fonction $t \to \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ n'est pas continue en 0. Contradiction : γ était supposé continu.
Par conséquent, il ne peut exister de chemin continu liant M et N dans $\overline{G}$, donc $\overline{G}$ est non connexe par arcs.

Montrons en revanche que $\overline{G}$ est bien enchaîné. Pour cela, prenons M, $N \in \overline{G}$ ainsi qu'un $\varepsilon > 0$ quelconque. Montrons que l'on peut construire une ε-chaîne liant M et N dans $\overline{G}$. Disinguons 3 cas :

- Si M, $N \in G$, alors comme G est connexe par arcs, on peut construire une ε-chaîne liant M et N dans G et donc dans $\overline{G}$ (voir 5c).
- Si M, $N \in \{0\} \times [-1,1]$, comme $[M,N] \subset \overline{G}$, on peut là aussi facilement construire une ε-chaîne.
- Si $M \in \{0\} \times [-1,1]$ et $N \in G$, comme $M \in \overline{G}$, il existe $M' \in G$ tel que $d(M,M') < \varepsilon$. De nouveau, comme M', $N \in G$ et que G connexe par arcs , on peut construire une ε-chaîne $M_1, \ldots, M_n$ entre M' et N. On a alors que $M, M_1, \ldots, M_n$ est une ε-chaîne entre M et N.

5) Dans E un espace vectoriel normé :

[6] explicitement prendre : $(t_n, \sin(1/t_n))$ avec $t_n = \frac{1}{\arcsin(y)+2n\pi}$ pour $n \geq 1$

[7] pour extraire un tel s_0, poser $B = \{s \in [0,1] \,/ x(s) = 0\}$ et prendre sa borne supérieure qui est atteinte car B compact (fermé borné) non vide ($0 \in B$)

· A convexe $\Rightarrow$ A étoilé :
Prenons un point a de A quelconque. Comme A est convexe, pour tout point $b \in A$, le segment $[a, b] \subset A$. Par conséquent A est étoilé par rapport à a.

· A étoilé $\Rightarrow$ A connexe par arcs :
Supposons que A est étoilé par rapport à a et prenons deux points quelconques x et y. On a alors $[x, a]$ et $[a, y]$ qui sont dans X. On peut donc relier x et y par un chemin continu passant par a.

· A connexe par arcs $\Rightarrow$ A bien enchainé :
Prenons deux points quelconques x, y de A et $\varepsilon > 0$ lui aussi quelconque, et montrons que l'on peut construire un ε-chaîne entre x et y. Comme A est connexe par arcs, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A$ reliant x et y. L'idée est alors de segmenter ce chemin pour obtenir une ε-chaîne. Or comme $[0, 1]$ est compact, γ est *uniformement continu* d'après le théorème de Heine. Donc il existe $\delta > 0$ tel que[8] :

$$|b - a| < \delta \Rightarrow \|\gamma(b) - \gamma(a)\| < \varepsilon.$$

On découpe alors $[0, 1]$ en segment de taille δ et on pose $x_j = \gamma(j\delta)$ (voir figure 3) pour $0 \leq j \leq \left[\frac{1}{\delta}\right]$. Puis $x_{n+1} = y$. Il est alors clair que $\|x_{j+1} - x_j\| \leq \varepsilon$ pour tout $0 \leq j \leq n + 1$ avec $x_0 = x$ et $x_n = y$. Ainsi $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ est une ε-chaîne entre x et y.

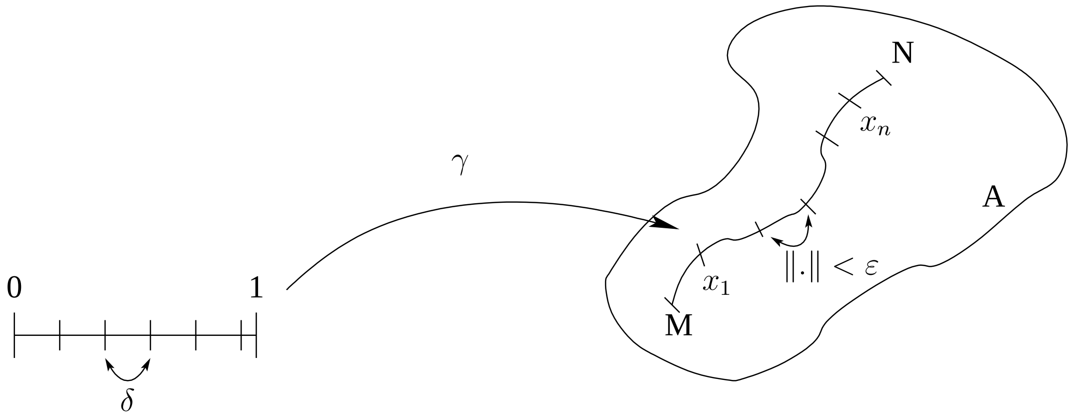


FIG. 3 – Construction d'une ε-chaine liant M et N.

· A compact et bien enchaîné $\Rightarrow$ A connexe :
Pour montrer que A est connexe, utilisons une des caractérisations d'un espace connexe à savoir si pour toute fonction φ continue telle que :

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Z}$$

on a φ constante alors A est connexe.
Soit donc $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction continue. Comme A est compact, on a d'après

[8] ce δ dépend évidemment du ε que l'on a fixé

le théorème de Heine qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, x, y \in A \;/\; d(x,y) < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(x)| < \frac{1}{2}.$$

Prenons un point quelconque $x_* \in A$ et montrons que φ est constante égale à $\varphi(x_*)$. Soit $y \in A$ un autre point. Comme A est bien enchaîné, il existe une δ-chaîne liant x_* à y, c'est-à-dire qu'il existe $x_0, \ldots, x_n$ tel que $x_0 = x_*$, $x_n = y$ et

$$d(x_j, x_{j+1}) < \delta \ , \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq n-1.$$

Mais alors $|\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)| < \frac{1}{2}$ et donc $\varphi(x_j) = \varphi(x_{j+1})$ puisque φ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Par une récurrence immédiate, on a donc : $\varphi(x_0) = \varphi(x_n)$ et donc $\varphi(x_*) = \varphi(y)$. Comme $y \in A$ était quelconque, on a bien $\varphi = \varphi(x_*)$ et donc φ constante. Ainsi A est connexe.

6) a/ L'ensemble C est en fait convexe (donc en particulier connexe par arcs) : soient $M = (x_1, y_1)$ et $N = (x_2, y_2)$ deux points de C, donc $y_1 > x_1$ et $y_2 > x_2$. Pour tout $0 \leq t \leq 1$, on a : $tM + (1-t)N \in C$ car :

$$ty_1 + (1-t)y_2 \ > \ tx_1 + (1-t)x_2.$$

Ainsi $[M, N] \subset C$.
Soit $(x, y) \in C$, par conséquent $y > x$ et donc $x \neq y$. Par injectivité de f, on a alors $f(x) \neq f(y)$ et ainsi $g(x, y) \neq 0$. Donc g ne s'annule pas sur C.

b/ Pour montrer que f est strictement monotone, montrons que C est de signe constant sur C. Raisonnons par l'absurde : il existe $M, N \in C$ tel que $g(M) < 0$ et $g(N) > 0$. Comme C est connexe par arc, il existe un chemin continu γ liant M et N dans C. On a alors :

$$g(\gamma(0)) < 0 \qquad \text{et } g(\gamma(1)) > 0.$$

Comme $g \circ \gamma$ est continue comme composé d'application, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires $s \in]0, 1[$ tel que $g(\gamma(s)) = 0$. Contradiction : g ne s'annule pas sur C.

Par conséquent g est de signe constant sur C, supposons par exemple que g est positive[9]. Ainsi pour tout $x < y$ de I, on a $g(x, y) > 0$ c'est-à-dire $f(y) > f(x)$. Par conséquent f est strictement croissante.

Ainsi pour tout ouvert de la forme $]a, b[$, on a $f(]a, b[) =]f(a), f(b)[$. Mais comme certains l'ont remarqué, ceci ne suffit pas à montrer que f est ouverte car si $I = [0, 1[$ par exemple, on a : $[0, 1[$ ouvert de I et $f([0, 1[) = [f(0), f(1)[$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. Il faut donc au choix préciser que :

- f ouverte de $\overset{o}{I}$ dans $\mathbb{R}$
- ou f ouverte de I sur son image.

[9] le cas g négative est similaire, on obtient f stricement décroissante

Appendice

• Pour la question **II.3)**, une autre méthode pour relier deux points de l'épigraphe M et N consiste à construire un chemin passant "au-dessus" du graphe de f allant de M à N (voir figure 4).

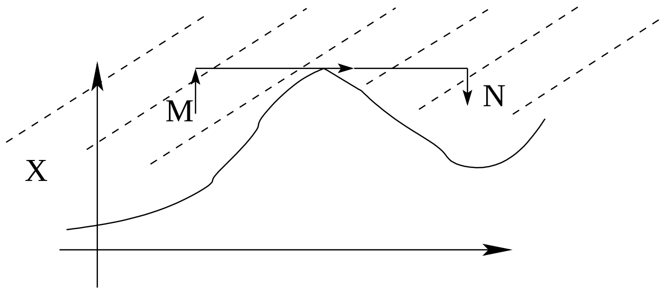


FIG. 4 – Un autre chemin liant M et N.

De façon explicite, posons $M = (x_1, y_1)$ et $N = (x_2, y_2)$. Soit m le maximum de f sur $[x_1, x_2]$[10]. On construit alors un chemin reliant M à N en trois temps de façon analogue à la première construction :

$$\gamma(s) = \begin{cases} (x_1\,,\, y_1 + 3s(m - y_1)) & \text{si } s \in [0, 1/3] \\ (x_1 + (3s-1)(x_2 - x_1)\,,\, m) & \text{si } s \in [1/3, 2/3] \\ (x_1\,,\, m + (3s-2)(y_2 - m)) & \text{si } s \in [2/3, 1] \end{cases}$$

• Pour la question **II.5.c)**, on peut montrer plus à savoir que dans un espace métrique E un ensemble connexe est bien enchaîné. Pour le démontrer, appelons A l'ensemble connexe, on se fixe un $\varepsilon > 0$ quelconque et on prend un point $x \in A$ quelconque lui aussi (si A est vide il n'y a rien à démontrer). On doit montrer que l'on peut relier x à n'importe quel point de A par une ε-chaîne. Pour le montrer, on introduit l'ensemble A_ε :

$$A_\varepsilon = \{y \in A \,/\, \text{ il existe une } \varepsilon - \text{chaîne reliant } x \text{ à } y\}.$$

Il est clair que A_ε est non vide puisque $x \in A_\varepsilon$. Montrons que A_ε est ouvert. Soit $y \in A_\varepsilon$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ la ε-chaîne joignant x à y. Il est clair que la boule $B(y, \varepsilon/2)$ appartient encore à A_ε. En effet si on prend un point $y' \in B(y, \varepsilon/2)$, il existe bien une ε-chaîne reliant x à y', il suffit pour cela de compléter $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ avec $x_{n+1} = y'$ $(d(x_n, x_{n+1}) = d(y, y') < \varepsilon)$. Par conséquent l'ensemble A_ε est ouvert.
Montrons que A_ε est fermé. Soit $(y_n)_n$ une suite de A_ε convergeant vers y, il nous faut montrer que $y \in A_\varepsilon$. Comme $y_n \longrightarrow y$, il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow d(y_n, y) < \varepsilon/2.$$

[10] f est continue et $[x_1, x_2]$ compact donc $m = \sup_{[x_1,x_2]} f = \max_{[x_1,x_2]} f < \infty$

Comme $y_N \in A_\varepsilon$, il existe une ε-chaîne reliant x à y_N, notée $(x_i)_{0\leq i\leq n}$. On complète alors cette ε-chaîne par $x_{n+1} = y$ et l'on a bien relié x à y par une ε-chaîne[11] donc $y \in A_\varepsilon$. Par conséquent, A_ε fermé.
L'ensemble A_ε étant non vide ouvert et fermé dans A connexe, on a que $A_\varepsilon = A$. Par conséquent tout point de A peut être relier avec x par une ε-chaîne. Le point x et $\varepsilon > 0$ étant quelconques, on a bien montré que A est bien-enchaîné.

[11] ici encore, on a : $d(x_n, x_{n+1}) = d(y_N, y) < \varepsilon$