Corrigé du second devoir de topologie, janvier 2008

Avertissement : ce second corrigé vise la concision, donc ne remplace en aucun cas le premier, où le correcteur avait pris soin, au vu des copies, de détailler de nombreux points et d'insérer des graphiques.

1 Projection stéréographique

0) (E est un e.v.n. de dimension 2 donc homéomorphe à R^2, mais précisons). La projection de $\mathrm{R}^3 = \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}$ sur R^2 est continue par définition de la topologie produit sur R^3. Sa restriction, la bijection $g : E \to \mathrm{R}^2, (x_1, x_2, 0) \mapsto (x_1, x_2)$, est donc continue. La bijection réciproque $g^{-1} : \mathrm{R}^2 \to E$ l'est également, puisque l'application

$$\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3 = \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto (x, 0) = (x_1, x_2, 0)$$

est continue, par continuité de ses deux composantes id_{R^2} et $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, x \mapsto 0$.

1) Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{p\}$, i.e. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et $x_3 \neq 1$. On a $h(x) = (y_1, y_2, 0)$ avec y_1, y_2 tels que $h(x) - p$ soit colinéaire à $x - p$, i.e. $(y_1, y_2, -1)$ colinéaire à $(x_1, x_2, x_3 - 1)$ i.e. $y_1 = \frac{x_1}{1-x_3}$ et $y_2 = \frac{x_2}{1-x_3}$. Réciproquement, soit $y = (y_1, y_2, 0) \in E$, chercher $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{p\}$ tel que $x_1 = (1 - x_3)y_1$ et $x_2 = (1 - x_3)y_2$ revient à chercher $t = 1 - x_3 \neq 0$ tel que $t^2(y_1^2 + y_2^2) + (1 - t)^2 = 1$, i.e. $t = \frac{2}{y_1^2+y_2^2+1}$. Donc $h : S^2 \setminus \{p\} \to E$ est bijective et $h^{-1}(y_1, y_2, 0) = (2y_1, 2y_2, y_1^2 + y_2^2 - 1)/(y_1^2 + y_2^2 + 1)$.
Un point fixe par h appartient à la fois à $S^2 \setminus \{p\}$ et à E. Réciproquement, pour tout $x \in S^2 \setminus \{p\} \cap E = S^2 \cap E$ i.e. $x = (x_1, x_2, 0)$ avec $x_1^2 + x_2^2 = 1$, le calcul donne $h(x) = x$.
Pour montrer que $S^2 \setminus \{p\}$ est homéomorphe à R^2 il suffit, d'après 0), de vérifier que h est un homéomorphisme. La continuité de h vient de la continuité (composante par composante) de l'application $S^2 \setminus \{p\} \to \mathrm{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0)$. La continuité de h^{-1} vient de la continuité (composante par composante) de l'application

$$E \to \mathrm{R}^3, (y_1, y_2, 0) \mapsto (2y_1, 2y_2, y_1^2 + y_2^2 - 1)/(y_1^2 + y_2^2 + 1).$$

S^2 et R^2 ne sont pas homéomorphes car S^2 (fermé borné de R^3) est compact tandis que R^2 (non borné) ne l'est pas.

2) Vérifions que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est une topologie sur $\overline{\mathrm{R}^2}$, pour $\mathcal{T}_1 =$ l'ensemble des ouverts de R^2 et $\mathcal{T}_2 =$ l'ensemble des $\{\infty\} \cup K^c$ avec compact de R^2. Comme $\emptyset$ est à la fois un ouvert et un compact de R^2 on a $\emptyset \in \mathcal{T}_1$ et $\overline{\mathrm{R}^2} \in \mathcal{T}_2$. Si $O, O' \in \mathcal{T}_1$ alors $O \cap O' \in \mathcal{T}_1$. Si $O \in \mathcal{T}_1$ et $O' = \{\infty\} \cup K^c \in \mathcal{T}_2$ alors $O \cap O' = O \cap K^c \in \mathcal{T}_1$. Si $O = \{\infty\} \cup K^c, O' = \{\infty\} \cup K'^c \in \mathcal{T}_2$ alors $O \cap O' = \{\infty\} \cup (K \cup K')^c \in \mathcal{T}_2$. Soit $O = \cup_{i \in I} O_i$ avec $\forall i \in I, O_i \in \mathcal{T}$. Si tous les O_i appartiennent à $\mathcal{T}_1$ alors O aussi. Si au contraire un O_i (au moins) appartient à $\mathcal{T}_2$, notons K le compact tel que $O_i = \{\infty\} \cup K^c$, remarquons que pour tout $j \in I$ (que O_j appartienne à $\mathcal{T}_1$ ou à $\mathcal{T}_2$) $O'_j := O_j \setminus \{\infty\}$ est un ouvert de R^2, et notons O' l'ouvert $\cup_{j \neq i} O'_j$. Alors $O = \{\infty\} \cup K^c \cup O' = \{\infty\} \cup (K \setminus O')^c \in \mathcal{T}_2$.
Vérifions que $\mathcal{T}$ est séparée. Soient $x, y \in \overline{\mathrm{R}^2}$ distincts. Si tous deux sont différents de ∞, ils sont séparés par deux éléments de $\mathcal{T}_1$ (puisque $(\mathrm{R}^2, \mathcal{T}_1)$ est séparé). Si au contraire l'un des deux, par exemple y, est égal à ∞, alors x appartient à R^2 qui est localement compact donc il existe O ouvert et K compact tels que $x \in O \subset K$. Alors $x \in O \in \mathcal{T}_1$, $y = \infty \in \{\infty\} \cup K^c \in \mathcal{T}_2$ et $O \cap (\{\infty\} \cup K^c) = O \cap K^c = \emptyset$.
Vérifions que $(\overline{\mathrm{R}^2}, \mathcal{T})$ est quasi-compact (et séparé, donc compact). Soit $\overline{\mathrm{R}^2} = \cup_{i \in I} O_i$ avec $\forall i \in I, O_i \in \mathcal{T}$. Un O_i (au moins) contient ∞ donc appartient à $\mathcal{T}_2$. Notons K le compact tel que $O_i = \{\infty\} \cup K^c$ et O'_j (pour tout $j \in I \setminus \{i\}$) l'ouvert $O_j \setminus \{\infty\}$. Alors $\mathrm{R}^2 = K^c \cup \bigcup_{j \neq i} O'_j$ i.e.

$K \subset \cup_{j\neq i} O'_j$ donc il existe J fini inclus dans $I\setminus\{i\}$ tel que $K \subset \cup_{j\in J} O'_j$, d'où $\overline{\mathrm{R}^2} = \cup_{j\in J\cup\{i\}} O_j$.
On définit une bijection $\tilde{h} : S^2 \to \overline{\mathrm{R}^2}$ en prolongeant l'homéomorphisme $g \circ h : S^2 \setminus \{p\} \to \mathrm{R}^2$ par $\tilde{h}(p) = \infty$. Montrons que $\tilde{h}$ est continue. Pour $U \in \mathcal{T}_1$, $\tilde{h}^{-1}(U) = (g \circ h)^{-1}(U)$ est un ouvert de $S^2\setminus\{p\}$ (donc de S^2, puisque $S^2\setminus\{p\}$ est ouvert dans S^2). Pour $U = \{\infty\}\cup K^c \in \mathcal{T}_2$, $\tilde{h}^{-1}(U) = \{p\} \cup (g \circ h)^{-1}(K^c) = \{p\} \cup [(S^2 \setminus \{p\}) \setminus (g \circ h)^{-1}(K)] = S^2 \setminus (g \circ h)^{-1}(K)$ est un ouvert de S^2.
$\tilde{h} : S^2$ (compact) $\to \overline{\mathrm{R}^2}$ (séparé) est une bijection continue. C'est donc un homéomorphisme, ce qui redémontre que $\overline{\mathrm{R}^2}$ est compact.

2 Connexité par arcs

1) Dans R^2,

   - l'union de deux droites sécantes est étoilée mais non convexe,
   - un cercle de rayon > 0 est connexe par arcs mais non étoilé,
   - le complémentaire d'une droite est bien enchaîné mais non connexe (donc non connexe par arcs).

2) D'après 5.a et 5.b, tout convexe de R est connexe par arcs. Réciproquement, soit I une partie de R connexe par arcs, et $x, y \in I$, alors il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to I$ de x à y ; γ prend les valeurs x et y donc prend toutes les valeurs intermédiaires (par continuité), donc $[x, y] \subset I$. Donc I est convexe. Les parties de R connexes par arcs sont donc les convexes de R, c'est-à-dire les intervalles (ce qui inclut les demi-droites).

3) La relation "être reliés dans X par un chemin continu" est évidemment une relation d'équivalence sur X (dont les classes sont appelées les composantes connexes par arcs de X). Or le graphe G de f est connexe par arcs (un chemin dans G de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est donné par $\gamma(t) = (x_t, f(x_t))$ avec $x_t = ty + (1-t)x$) donc tous les points de G sont dans la même classe d'équivalence, et tout $(x, y) \in X$ est dans la même classe que $(x, f(x)) \in G$ (puisque $[(x, f(x)), (x, y)] \subset X$). Donc tous les points de X sont dans la même classe, i.e. X est connexe par arcs.
   On démontre facilement que f est une application convexe si et seulement si $\forall M_1, M_2 \in G, [M_1, M_2] \subset X$. En particulier si X est convexe alors f est une application convexe, mais réciproquement si f est une application convexe alors X est convexe car pour tous $N_1 = (x_1, y_1), N_2 = (x_2, y_2) \in X$ et $t \in [0,1]$, $M_1 := (x_1, f(x_1))$ et $M_2 := (x_2, f(x_2))$ appartiennent à G donc $(x, y) := tM_1 + (1-t)M_2 \in X$ donc $(x, y') := tN_1 + (1-t)N_2 \in X$, car $y' \geq y \geq f(x)$.

4) Ce graphe G est connexe par arcs (comme dans 3)).
   Montrons que $\overline{G} = G \cup I$ avec $I = \{0\} \times [-1, 1]$. Pour tout $y \in [-1, 1]$, soient $t_n > 0$ tels que $t_n \to 0$ et $\sin(1/t_n) = y$ (par exemple $t_n = \frac{1}{2\pi n + \arcsin y}$ pour $n \geq 1$), alors $(t_n, \sin(1/t_n)) \in G$ et $\to (0, y)$. Donc $I \subset \overline{G}$, donc $G \cup I \subset \overline{G}$. Inversement, soient $(x, y) \in \overline{G}$ et $(x_n, y_n) \in G$ tels que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Si $x > 0$ alors $(x, y) \in G$ (par continuité de sin en $1/x$). Sinon, $x = 0$ (car $x_n > 0$) et $y \in [-1, 1]$ (car $y_n \in [-1, 1]$). Donc $\overline{G} \subset G \cup I$, d'où l'égalité.
   Montrons que $\overline{G}$ (bien que connexe, comme adhérence d'un connexe) n'est pas connexe par arcs. G et I le sont. Il s'agit donc de prouver que tout chemin continu dans $G \cup I$ dont l'origine est dans I n'atteint jamais G. Raisonnons par l'absurde. Soient $\gamma : [0,1] \to G \cup I$ une application continue, de composantes $s \mapsto x(s), s \mapsto y(s)$, avec $x(0) = 0$ et $x(1) > 0$. Alors $F := x^{-1}(0)$ (fermé non vide de $[0, 1]$, ne contenant pas 1) admet un plus grand élément t, qui est < 1. On a donc $x(t) = 0$ et $\forall s \in]t, 1], x(s) > 0$. Soient $y \in [-1, 1] \setminus \{y(t)\}$, $x_n = \frac{1}{2\pi n + \arcsin y}$, et N tel que $\forall n \geq N, 0 < x_n < x(1)$. On construit facilement par récurrence une suite décroissante $(s_n)_{n\geq N}$ dans $]t, 1]$ telle que $\forall n \geq N, x(s_n) = x_n$. Sa limite $s \geq t$ vérifie

$x(s) = 0$ donc $s = t$ donc $y(s_n) \to y(t)$. Or $y(s_n) = \sin(1/x(s_n)) = \sin(1/x_n) = y \neq y(t)$: contradiction.
Par contre, puisque $\overline{G}$ est connexe, il est bien enchaîné (cf corrigé ci-dessous d'une généralisation de la question 5.c).

5) Soit $A \subset E$ (dans a) et b) on suppose que E est un e.v.n., dans c) et d) il suffit que E soit un espace métrique).

   a) Si A est convexe (et non vide !), il est étoilé à partir de n'importe quel $x \in A$.

   b) Si A est étoilé à partir d'un certain $x \in A$, tout point y de A est dans la même "composante connexe par arcs" de A que x.

   c) Supposons plus généralement que A est connexe et montrons qu'alors il est bien enchaîné. Soient $\epsilon > 0, x \in A$, et C l'ensemble des points de A joignables à x par une ϵ-chaîne dans A. Il s'agit de prouver que $C = A$. Il suffit pour cela (puisque A est connexe et que $C \neq \emptyset$ car $x \in C$) de vérifier que dans A, C est à la fois ouvert et fermé. Il est ouvert car $\forall y \in C, B(y, \epsilon) \subset C$. Il est fermé car $\forall y \in \overline{C}$, $B(y, \epsilon) \cap C \neq \emptyset$, ce qui implique $y \in C$.

   d) Supposons A compact et non connexe et montrons qu'il est "mal enchaîné". Par hypothèse il existe dans A deux fermés non vides complémentaires, F et G. Comme F est compact (car fermé dans un compact) et disjoint du fermé G, on a $d := d(F, G) > 0$ (cf annales, exercice 87). Pour tout $\epsilon < d$, un point de F et un point de G ne sont pas joignables par une ϵ-chaîne dans A.

6)

   a) C est convexe, donc connexe par arcs d'après 5, a) et b). Comme f est injective, g ne s'annule pas sur C.

   b) g est continue sur C (connexe par arcs), donc $g(C)$ est une partie de R connexe par arcs i.e. d'après 2) un intervalle de R. Or d'après a), $0 \notin g(C)$. Donc $g(C)$ est inclus soit dans $]0, +\infty[$, soit dans $]-\infty, 0[$, i.e. f est strictement monotone.
   Appelons "intervalle ouvert de I" tout intervalle de la forme $O \cap I$ avec O intervalle ouvert de R, c'est--dire tout intervalle inclus dans I et ouvert dans I. Comme f est continue et strictement monotone, l'image par f de tout intervalle ouvert de I est un intervalle ouvert de $f(I)$, donc $f : I \to f(I)$ est ouverte (et bijective et continue, donc c'est un homéomorphisme). (Mais si l'intervalle I n'est pas ouvert dans R, l'intervalle $f(I)$ ne le sera pas non plus donc $f : I \to$ R ne sera pas ouverte).