UNIVERSITÉ PAUL SABATIER 2007-2008

Licence de Mathématiques Fondamentales

PROBLÈME DE TOPOLOGIE

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de sa topologie usuelle : un voisinage de $x \in \mathbb{R}$ est une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ contenenant un intervalle ouvert centré en x, un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ contenenant un ensemble de la forme $]a, +\infty]$ (resp $[-\infty, a[$) avec $a \in \mathbb{R}$. On rapelle qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ converge vers $x \in \overline{\mathbb{R}}$ si tout voisinage V contient tous les x_n à partir d'un certain rang. On rappelle aussi qu'une base de voisinages de x est une famille $\mathcal{B}$ de voisinages de x telle que tout voisinage de x contienne un $B \in \mathcal{B}$.

Étant donnée uns suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble X, on appelle sous-suite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou suite extraite) une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante : pour tous entiers $m < n$, on a $\varphi(m) < \varphi(n)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{\mathbb{R}}$. On note adh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des éléments $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tels qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x

Questions préliminaires.

a) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Montrer que $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$.

b) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, et soit $x = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}$. Montrer que $x \in$ adh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Soit A une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $M := \sup A$ (resp. $m = \inf A$) appartient à $\overline{A}$

1) a) Pour $x \in \overline{\mathbb{R}}$, construire une base dénombrable et décroissante de voisinages $(V_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de x (on distinguera les cas $x \in \mathbb{R}$ et $x \in \{-\infty, +\infty\}$).

b) Montrer, en utilisant le Théorème de Bolzano-Weierstrass que adh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non vide.

c) Montrer que si $x \in$ adh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors, pour tout voisinage V de x, l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{N} : x_p \in V\}$$

est infini.

d) Réciproquement, on suppose que pour tout voisinage V de x, l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{N} : x_p \in V\}$$

est infini. Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_1} \in V_1$, on pose $\varphi(1) = n_1$. Construire par récurrence une sous-suite $(x_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{\varphi(p)} \in V_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $x = \lim_{p\to\infty} x_{\varphi(p)}$ et que $x \in$ adh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pourra utiliser dans la suite que $x \in$ adh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si, pour tout voisinage V de x, l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} : x_p \in V\}$ est infini.

2) a) Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}$ un élément de adh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que

$$x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq p\}}.$$

b) Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq p\}}$ et soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages de x. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{N} : x_p \in V_n\}$$

est infini. En déduire que $x \in \text{adh}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (utiliser **1)**, d)), que

$$\text{adh}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq p\}}, \tag{1}$$

et que adh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé.

3) On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $y_p = \sup_{n\geq p} x_n$ et $z_p = \inf_{n\geq p} x_n$.

a) Montrer que $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante, que $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $z_p \leq x_p \leq y_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

b) On pose

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{p\in\mathbb{N}} y_p = \inf_{p\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq p} x_n \in \overline{\mathbb{R}},$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} z_p = \sup_{p\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq p} x_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Dire pourquoi $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{p\to\infty} y_p$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{p\to\infty} z_p$. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \in \text{adh}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et que } \liminf_{n\to\infty} x_n \in \text{adh}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

(on pourra utiliser la question préliminaire et utiliser (1)).

c) Montrer que

$$\text{adh}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\liminf_{n\to\infty} x_n, \limsup_{n\to\infty} x_n].$$

En déduire que $\limsup_{n\to\infty} x_n$ (resp. $\liminf_{n\to\infty} x_n$) est la plus grande (resp. petite) limite d'une sous-suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) a) On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ converge vers $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = x. \tag{2}$$

b) Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que (2) a lieu. Montrer alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

5) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

a) Montrer que $x_n \leq y_n$ implique

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n \text{ et } \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

On suppose que la somme $x_n + y_n$ est possible pour tout n.

b) Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$$

dès que la somme a un sens dans le membre de droite. Donner un exemple où il y a inégalité stricte. Que peut-on dire pour $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n)$?

c) On suppose que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \liminf_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

dès que la somme a un sens dans le membre de droite.

Question subsidiaire. Calculer $\limsup_{n\to\infty} x_n$ pour $x_n = \cos(n)$.