Université Paul Sabatier

TOPOLOGIE

(résumé de cours -2007-2008)

Anne Cumenge.

SOMMAIRE

Prérequis et rappels de définitions.

Les propriétés du corps ordonné des réels sont supposées connues, en particulier celle de la borne supérieure, ainsi que les notions de limites de suites réelles ou complexes, de continuité de fonctions réelles ou complexes d'une ou plusieurs variables réelles.
Ces notions ont été définies à l'aide de celles de distance et de norme, que nous rappelons ci-dessous.

DÉFINITION : Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une *norme sur E* est une application $\nu : E \to \mathbb{R}_+$ telle que
(N_1) $\nu(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$
(N_2) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$, $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$ (homogénéité)
(N_3) $\forall x \in E, \forall y \in E$, $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ (sous-additivité)

Un espace vectoriel normé (plus précisément un K-espace vectoriel normé (en abrégé e.v.n., plus précisément K-e.v.n.)) est un couple (E, ν) où E est un K-e.v. et ν une norme sur E.
On note en général une norme par $||.||$; si $x \in E$ e.v.n., $||x||$ s'appelle la norme de x.

- normes usuelles sur K^n , $n \in \mathbb{N}^*$; soit $x = (x_1, ..., x_n) \in K^n$:
norme euclidienne : $||x||_{\text{eucl}} = \big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\big)^{1/2}$; norme sup : $||x||_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$; $\nu_+(x) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$

X désigne un ensemble non vide.

DÉFINITION : On appelle *distance sur X* une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :
(D_1) $\forall x, y \in X, d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)
(D_2) $\forall x, y \in X, d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (axiome de séparation)
(D_3) $\forall x, y, z \in X, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire)

Le nombre $d(x,y)$ s'appelle distance des points x et y. Un ensemble X muni d'une distance d s'appelle un espace métrique.

Boules. Soit $a \in X$ et r réel ≥ 0 :
$B(a,r) = \{x \in X / \, d(x,a) < r\}$ est la boule ouverte de centre a de rayon r
$B'(a,r) = \{x \in X / \, d(x,a) \leq r\}$ est la boule fermée de centre a de rayon r

EXEMPLES
- $X = \mathbb{R}$: $d(x,y) :=| x - y |$; d ainsi définie est une distance sur $\mathbb{R}$ appelée distance euclidienne. La boule ouverte (resp. fermée) de centre a de rayon r est $]a-r, a+r[$ (resp. $[a-r, a+r]$).

- Distance associée à une norme sur un e.v.n.

DÉFINITION-PROPOSITION : Soit $(E, ||.||)$ un e.v.n..
L'application $d : (x,y) \in E \times E \mapsto d(x,y) := ||x-y||$ est une distance sur E, invariante par translation (i.e. $\forall x, y, z \in E$, $d(x+z, y+z) = d(x,y)$), appelée distance associée à la norme $||.||$.
En pratique, on suppose toujours qu'un e.v.n. est muni de la distance associée à la norme.

En particulier, les distances usuelles sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, sont associées aux trois normes rappelées plus haut :
pour $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$:
$d_{eucl}(x,y) = \big((x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2\big)^{1/2}$ (distance euclidienne)
$d_+(x,y) =| x_1 - y_1 | + ... + |x_n - y_n|$
$d_\infty(x,y) = max(| x_1 - y_1 |, ..., |x_n - y_n|)$.

REMARQUE : Sur $\mathbb{C}$, $\delta(z,w) := |z-w|$ est la distance euclidienne.

La topologie générale propose un formalisme permettant de donner un sens à des notions comme celles de "limites d'une suite", de "voisinages d'un point", de "continuité de fonctions" etc ... dans un cadre relativement général, en cherchant à généraliser les notions familières rencontrées dans les problèmes d'analyse sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$.
En topologie générale, les notions resteront qualitatives ; le quantitatif interviendra à nouveau dans le chapitre sur les espaces métriques (chapitre 3).

Espaces topologiques

1. Structure topologique : définition par famille d'ouverts.

Définition : Une structure topologique $\mathcal{T}$ sur un ensemble X est définie par la donnée d'une famille $\mathcal{O}$ de parties de X vérifiant les trois axiomes suivants (*axiomes des ouverts*) :

(O_1) toute réunion d'éléments de $\mathcal{O}$ est élément de $\mathcal{O}$

(O_2) une intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est élément de $\mathcal{O}$

(O_3) $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathcal{O}$.

X (ou $(X, \mathcal{T})$) est appelé un espace topologique, de topologie $\mathcal{T}$, de famille d'ouverts $\mathcal{O}$.

Exemples : la topologie sur X est appelée topologie grossière sur X si la famille des ouverts est $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$, topologie discrète sur X si $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$.
La topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est celle dont la famille d'ouverts est :
$\mathcal{O} = \{\omega \subset \mathbb{R}\,,\, \omega$ est une union d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}\}$.

FERMÉS

définition : Une partie A d'un espace topologique X est un *fermé de* X si son complémentaire $X \setminus A$ est un ouvert de X.

exemples : $[0, \pi]$, $F = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\,,\, n \in \mathbb{N}^*\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1. *Dans un espace topologique X :*

- *Toute intersection de fermés est un fermé.*
- *Une union finie de fermés est un fermé.*
- *$\emptyset$ et X sont des fermés.*

CARACTÉRISATION D'UNE TOPOLOGIE PAR LES FERMÉS

Proposition 1.2. *Soit X un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de parties de X telle que :*

(I) *toute intersection d'éléments de $\mathcal{F}$ est élément de $\mathcal{F}$*

(II) *une union finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.*

(III) *$\emptyset \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{F}$.*

Alors il existe sur X une topologie $\mathcal{T}$ et une seule dont la famille de fermés soit $\mathcal{F}$.

2. Voisinages.

Définition : Soit X un espace topologique et $x \in X$; Un sous-ensemble V de X est *voisinage de x dans X* si V contient un ouvert contenant x.
On notera $\mathcal{V}_X(x)$ (ou $\mathcal{V}(x)$) la famille des voisinages de x dans l'espace topologique X.

La famille des voisinages d'un point est en général très fournie ; et certains voisinages sont (inutilement) vastes ; ainsi dans $\mathbb{R}$ euclidien, $[-1, \pi[\cup\mathbb{Q}$ ou bien $]-\infty, b[$, où $b \in \mathbb{R}_+^*$ sont voisinages de 0 ; dans la plupart des définitions ou propositions faisant appel aux voisinages, on pourra se contenter de considérer des "systèmes fondamentaux" de voisinages :

Définitions : On appelle *système fondamental de voisinages de x* (s.f.v. de x en abrégé) toute famille $\mathcal{S}(x)$ de voisinages de x telle que $\forall V \in \mathcal{V}(x)\,;\, \exists W \in \mathcal{S}(x) \,|\, W \subset V$.
Un espace topologique X est *à bases dénombrables de voisinages* (ou à systèmes fondamentaux dénombrables de voisinages) si tout $x \in X$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages.

Exemples : Si X est un espace topologique et $x \in X$, la famille des ouverts contenant x est un s.f.v. de x.
Si $X = \mathbb{R}$ euclidien : $\{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]\,,\, \varepsilon > 0\}$, $\{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\,,\, n \in \mathbb{N}^*\}$ sont des s.f.v. de x ; et on remarque que $\mathbb{R}$ est à bases dénombrables de voisinages.

PROPRIÉTÉS DES VOISINAGES

lien ouverts-voisinages :

Proposition 2.1. *Dans un espace topologique, une partie est ouverte ssi elle est voisinage de chacun de ses points.*

Proposition 2.2. *Soit X espace topologique et $a \in X$*

- $\forall V \in \mathcal{V}(a)\ :\ a \in V$
- Si $V_1 \in \mathcal{V}(a)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(a)$, alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$
- Si $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V \subset B$, alors $B \in \mathcal{V}(a)$
- $\forall V \in \mathcal{V}(a)\,,\, \exists W \in \mathcal{V}(a) \,|\, W \subset V$ et $(\forall y \in W\,,\, V \in \mathcal{V}(y))$.

Remarque : la dernière propriété suggère qu'un voisinage de a "entoure bien" a.

DÉFINITION D'UNE TOPOLOGIE VIA LES VOISINAGES

Proposition 2.3. *Soit X un ensemble non vide, et soit pour tout point x de X une famille non vide $\mathcal{W}(x)$ de parties de X telle que :*

(i) $\forall V \in \mathcal{W}(a) \ : \ a \in V$

(ii) *Si* $V_1 \in \mathcal{W}(a)$ *et* $V_2 \in \mathcal{W}(a)$, *alors* $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{W}(a)$

(iii) *Si* $V \in \mathcal{W}(a)$ *et* $V \subset B$, *alors* $B \in \mathcal{W}(a)$

(iv) $\forall V \in \mathcal{W}(a)\,,\, \exists W \in \mathcal{W}(a) \,|\, W \subset V$ *et* $(\forall y \in W\,,\, V \in \mathcal{W}(y))$.

Alors il existe sur X une topologie et une seule $\mathcal{T}$ telle que pour tout $x \in X$, la famille des voisinages de x pour $\mathcal{T}$ soit exactement $\mathcal{W}(x)$.

Application : TOPOLOGIE D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Soit (X,d) un espace métrique. Pour tout $x \in X$, on pose :

$\mathcal{V}(x) = \{ V \subset X \ /\exists r > 0\,,\, B(x,r) \subset V \ \}$

Il existe sur X une topologie unique $\mathcal{T}_d$, appelée *topologie associée à la distance d* , telle que pour tout x de X, $\mathcal{V}(x)$ soit l'ensemble des voisinages de x pour cette topologie.

EXEMPLE : Sur $\mathbb{R}^n$, les distances usuelles d_{eucl}, d_+ et d_∞ définissent la même topologie, la topologie euclidienne (en effet, $d_\infty \leq d_{eucl} \leq d_+ \leq n\, d_\infty$, par suite pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ces trois distances donnent lieu à la même famille de voisinages de x).

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES :

chacune des familles suivantes est un s.f.v. de x :

$\{B(x,r)\,,\ r>0\}\,;\,\{B'(x,r)\,,\ r>0\}\,;\,\{B(x,\frac{1}{n})\,,\ n\in\mathbb{N}^*\}\,;\,\{B'(x,\frac{1}{n})\,,\ n\in\mathbb{N}^*\}$.

Tout espace métrique est à bases dénombrables de voisinages.

LES OUVERTS D'UN MÉTRIQUE

une partie d'un espace topologique est ouverte SSI elle est voisinage de chacun de ses points. Par conséquent :

Une partie A d'un espace métrique (X,d) est un ouvert pour la topologie T_d SSI pour tout x de A il existe une boule $B(x,r_x)$, de rayon $r_x > 0$, contenue dans A.

On vérifie que si (X,d) est un espace métrique :

(a) *Toute boule ouverte (resp. fermée) de X est un ouvert (resp. un fermé) de X.*

(b) *Les ouverts de X sont les réunions de boules ouvertes*

3. Intérieur, adhérence, densité.

X est un espace topologique.

INTÉRIEUR

Définition : Un point $x \in X$ est un *point intérieur à* $A \subset X$ si A est voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\mathrm{Int_X A}$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, IntA ou $\overset{\circ}{A}$.

Proposition 3.1. : *Soit* $A \subset X$.

$\overset{\circ}{A} \subset A$ et $\overset{\circ}{A}$ *est le plus grand ouvert de X inclus dans A ;* *A est ouvert SSI* $\overset{\circ}{A} = A$; $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

Proposition 3.2. A, B et $A_j\,,j \in J$ *sont des parties de X.*

$A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$; $\mathrm{Int(A \cap B) = IntA \cap IntB}$; *si J est infini* : $\mathrm{Int(\cap_{j\in J} A_j) \subset \cap_{j\in J} IntA_j}$;
pour J quelconque (fini ou infini) : $\cup_{j\in J}\mathrm{IntA_j} \subset \mathrm{Int} \cup_{\mathrm{j\in J}} \mathrm{A_j}$

ADHÉRENCE

Définition : Un point $x \in X$ est un *point adhérent à* $A \subset X$ si tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\mathrm{adh_X A}$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, adhA ou $\overline{A}$.

Remarque : Si $\mathcal{S}(x)$ est un s.f.v. de x, alors : $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{S}(x)\,,\, V \cap A \neq \emptyset$.

En particulier, dans un métrique : $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Proposition 3.3. $\complement_X \overline{A} = \overset{\circ}{\complement_X A}$ et $\complement_X \overset{\circ}{A} = \overline{\complement_X A}$.

On déduit alors les propriétés de l'adhérence de celles de l'intérieur :

Proposition 3.4. *Soit* $A \subset X$.

$A \subset \overline{A}$ et $\overline{A}$ *est le plus petit fermé de X contenant A ;* *A est fermé SSI* $\overline{A} = A$; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Proposition 3.5. *A, B et A_j , $j \in J$ sont des parties de X.*
$A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; *si J est infini* : $\cup_{j\in J}\overline{A_j} \subset \overline{\cup_{j\in J}A_j}$;
pour J quelconque (fini ou infini) : $\cup_{j\in J}\overline{A_j} \subset \overline{\cup_{j\in J}A_j}$.

POINTS D'ACCUMULATION, POINTS ISOLÉS

Définition : Soit $\emptyset \neq A \subset X$. Un point x adhérent à A est

- soit *un point d'accumulation de A* : si tout voisinage de x rencontre $A \setminus \{x\}$
- soit *un point isolé de A* : s'il existe un voisinage V de x tel que $A \cap V = \{x\}$.

Un point d'accumulation de A peut ou non appartenir à A.

FRONTIÈRE

Définition : Un point $x \in X$ est *un point frontière de* $A \subset X$ si tout voisinage de x rencontre à la fois A et son complémentaire $\complement_X A = X \setminus A$. L'ensemble des points frontières de A s'appelle la frontière de A et se note $\mathrm{Fr}\,\mathrm{A}$ ou ∂A.
$\mathrm{FrA} = \mathrm{Fr}(\complement_\mathrm{X}\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\complement_\mathrm{X}\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}$.

DENSITÉ

Définition : Une partie A de X est *dense dans X* (ou partout dense dans X) si $\overline{A} = X$.
Une caractérisation : A est dense dans X ssi tout ouvert non vide de X rencontre A.

Définition : Un espace topologique est *séparable* s'il contient une partie dénombrable et dense.

Exemple : $\mathbb{R}$ est séparable puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Comparaison de topologies.

Définition : Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X ; on dit que *$\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$* si tout ouvert de X pour $\mathcal{T}_1$ est ouvert de X pour $\mathcal{T}_2$.

La relation "est moins fine que" est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des topologies sur X.
Si $\mathcal{O}_j$ (resp. $\mathcal{F}_j$, $\mathcal{V}_j(x)$) désigne la famille des ouverts de $(X, \mathcal{T}_j)$ (resp. des fermés, des voisinages de $x \in X$) : $\mathcal{T}_1$ moins fine que $\mathcal{T}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{V}_1(x) \subset \mathcal{V}_2(x)$, $\forall x \in X$.

Plus la topologie est fine, plus riche est la structure topologique ; ainsi, si T_1 est moins fine que $\mathcal{T}_2$, pour $B \subset X$ on a : $Int_{\mathcal{T}_1} B \subset Int_{\mathcal{T}_2} B \subset B \subset adh_{\mathcal{T}_2} B \subset adh_{\mathcal{T}_1} B$.

5. Topologie induite.

Définition-proposition 5.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique de famille d'ouverts $\mathcal{O}$ et $A \subset X$; la famille $(\omega \cap A)_{\omega\in\mathcal{O}}$ des traces sur A des ouverts de X est la famille des ouverts d'une topologie sur A, appelée topologie induite par la topologie $\mathcal{T}$ de X et notée $\mathcal{T}|_A$; A muni de $\mathcal{T}|_A$ est un sous-espace de X.*

Si A est un sous-espace d'un espace topologique X, les *fermés de A* sont les traces sur A des fermés de X, pour tout $a \in A$, les *voisinages de a dans A* sont les traces sur A des voisinages de a dans X.

Remarque : soit $B \subset A \subset X$; en général, B ouvert de $A \not\Rightarrow B$ ouvert de X ; on a toutefois :

Proposition 5.2. *Soit A sous-espace d'un espace topologique X. Pour que tout ouvert (resp. tout fermé) de A soit un ouvert (resp. un fermé) de X, il faut et il suffit que A soit un ouvert (resp.un fermé) de X.*

EXEMPLES :
- Sous-espaces d'un métrique :

Proposition 5.3. *Soit (X, d) un métrique, A une partie de X. La topologie sur A associée à la distance induite $d_A = d|_{A\times A}$ est exactement la topologie induite sur A par la topologie de X associée à la distance d.*
- En tant que sous-espaces de $\mathbb{R}$ euclidien, $\mathbb{Z}$ et $A = \{\frac{1}{n}\, , \, n \in \mathbb{N}^*\}$ sont des espaces discrets ; plus généralement :

Proposition 5.4. *Un sous-espace A d'un espace topologique X est un espace discret ssi tous les points de A sont des points isolés.*

TRANSITIVITÉ DES TOPOLOGIES INDUITES

Proposition 5.5. Soit $(X, \mathcal{T})$ espace topologique, $(A, \mathcal{T}|_A)$ un sous-espace de X et $B \subset A$; les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}|_A$ induisent sur B la même topologie.

Limites - Continuité.

1. Limites de fonctions.

1.1. Généralités

Définition : Soit X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X, f une application de A dans X et β un point adhérent à A. On dit que $f(x)$ *tend vers* $y \in Y$ *lorsque* x *tend vers* β *en restant dans* A si pour tout voisinage V de y dans Y, il existe un voisinage W de β dans X tel que $f(A \cap W) \subset V$.
y est appelée *une valeur limite de* f lorsque $x \to \beta$, $x \in A$ et on écrit $\displaystyle\lim_{x \to \beta\,,\, x \in A} f(x) = y$.

Remarques : - f n'est pas nécessairement définie en β.
- on peut remplacer dans la définition la famille $\mathcal{V}_Y(y)$ des voisinages de y dans Y par un s.f.v. $\mathcal{S}_Y(y)$ de y et/ou la famille $\mathcal{V}_X(\beta)$ par un s.f.v. $\mathcal{S}_X(\beta)$.

Cas particuliers : - Si $A = X$, on écrit simplement $\displaystyle\lim_{x \to \beta} f(x) = y$; remarquons que l'on a :
$\displaystyle\lim_{x \to \beta} f(x) = y \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_Y(y)\,,\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_X(\beta)$.
- Si $A = X \setminus \{\beta\}$, on écrit $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \beta \\ x \neq \beta}} f(x) = y$.

- limites de suites : $+\infty$ est point adhérent à $\mathbb{N}$ dans la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\, +\infty\}$ munie de sa topologie usuelle (cf. ci-dessous) ; et l'on peut dire qu'une suite $(x_n)_n$ d'un espace topologique X tend vers $\ell \in X$ (ou converge vers ℓ) lorsque n tend vers $+\infty$, $(n \in \mathbb{N})$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell)\,,\ \exists n_0 = n_0(V) \in \mathbb{N}\,,\ n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in V\,.$$

Rappel : la topologie usuelle sur la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est définie par exemple en se donnant les familles de voisinages ; on pose :
$\mathcal{V}(-\infty) = \{W \subset \overline{\mathbb{R}}\,,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\,,\ [-\infty, \alpha[\subset W\}\,,\ \mathcal{V}(+\infty) = \{W \subset \overline{\mathbb{R}}\,,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\,,\ ]\alpha, +\infty] \subset W\}$,
et pour $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{V}(x) = \{W \subset \overline{\mathbb{R}}\,,\ \exists \varepsilon > 0\,,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset W\}$
$\mathbb{R}$ est alors un sous-espace dense de $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 1.1 : *Soient X et Y des espaces topologiques, A une partie de X, β un point adhérent à A et f une application de A dans Y.*
Si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \beta \\ x \in A}} f(x) = y$, alors pour toute suite $(a_n)_n$ de A qui converge vers β, la suite $(f(a_n))_n$ converge vers y.

la proposition peut s'énoncer ainsi :
si $f(x)$ tend vers y lorsque x tend vers β en restant dans A, alors, $f(x)$ *tend séquentiellement vers* y.

Remarque : la réciproque est fausse en l'absence d'hypothèse supplémentaire sur X.

1.2. Suites et sous-suites dans un espace topologique

Définition : une suite $(x_n)_n$ d'un espace topologique X est *convergente (dans X)* s'il existe $\ell \in X$ tel que $x_n \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$, $n \in \mathbb{N}$; on dit que ℓ est *UN point limite de* $(x_n)_n$ *dans* X.
remarques : - si $(a_n)_n \subset A \subset X$, et si $(a_n)_n$ converge vers ℓ, alors nécessairement $\ell \in \bar{A}$.
- il n'y pas toujours unicité de limite dans un espace topologique quelconque : dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie grossière, toute suite $(x_n)_n$ admet une infinité de limites.
- les suites convergentes d'un espace discret sont les suites stationnaires.

Définition : si $u : \mathbb{N} \to X$ est une suite d'un espace topologique X, une *sous-suite* (*ou suite extraite*) de u est une suite de la forme $u \circ \varphi$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 1.2 : *si une suite $(u_n)_n$ d'un espace topologique X converge vers un point limite x, alors toute sous-suite de $(u_n)_n$ converge vers ce même point limite x.*

1.3. Valeurs d'adhérence d'une suite.

Définition : Soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace topologique X. Un élément α de X est une *valeur d'adhérence* (v.a. en abrégé) de la suite $(x_n)_n$ si pour tout voisinage V de α, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p = p(n) \geq n$ tel que $x_p \in V$.
(en d'autres termes si $\{j \in \mathbb{N}, x_j \in V\}$ est infini).

En particulier, *tout point limite d'une suite en est une valeur d'adhérence* (réciproque fausse).

Proposition 1.3 : *L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite* $(x_n)_n$ *est égal à* $\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{x_p\,,\ p\geq n\}}$.

Proposition 1.4 : *Soit* $(x_n)_n$ *une suite d'un espace topologique* X*. S'il en existe une sous-suite* $(x_{\varphi(k)})_k$ *qui converge vers* α*, alors* α *est une valeur d'adhérence de* $(x_n)_n$.

REMARQUE : réciproque fausse.

1.4. Utilisation des suites dans les espaces à s. f. dénombrables de voisinages

Rmq : Soit X à systèmes fondamentaux dénombrables de voisinages. (on dit également "à bases dénombrables de voisinages").

Tout $x\in X$ possède donc un s.f.v. $(V_j)_{j\in J}$, où J est dénombrable. On peut sans perte de généralité supposer que $J=\mathbb{N}$. (Si $J=\{j_1,...,j_p\}$ est fini, on peut poser $V_i'=V_{j_i}$ pour $i=1,...,p$ et $V_i'=V_{j_p}$, $\forall i\geq p$ et $(V_i')_{i\in\mathbb{N}}$ est encore un s.f.v de x).

Par ailleurs, la propriété suivante est très utile :

Dans un espace à bases dénombrables de voisinages, tout point possède un s.f.v. formé d'une suite décroissante $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de voisinages .*

(Il suffit de poser $W_0=V_0$, $W_n=V_0\cap V_1\cap...\cap V_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$).

Proposition 1.5. *Soit* X *espace topologique à bases dénombrables de voisinages et* $A\subset X$*. Un point* x *de* X *est adhérent à* A *SSI il existe une suite* $(a_n)_n$ *de points de* A *qui converge vers* x.

Corollaire 1.6. *Dans un espace topologique à base dénombrable de voisinages une partie* A *est fermée SSI elle contient tous les points limites de ses suites convergentes.*

Proposition 1.7. *Soit* X *espace topologique à bases dénombrables de voisinages et* $(x_n)_n\subset X$.
α *est valeur d'adhérence de* $(x_n)_n$ *SSI il existe une sous-suite* $(x_{\varphi(n)})_n$ *de* $(x_n)_n$ *qui converge vers* α.

Proposition 1.8. *Soient* X *un espace topologique à bases dénombrables de voisinages,* Y *un espace topologique,* $A\subset X$*,* $f:A\to Y$ *et* $\beta\in\overline{A}$*. Alors :*
$\lim\limits_{\substack{x\to\beta\\ x\in A}}f(x)=y$ *SSI pour toute suite* $(a_n)_n$ *qui converge vers* β*, la suite* $(f(a_n))_n$ *converge vers* y.

2. Continuité.

2.1. Continuité ponctuelle.

Définition. Une application $f:X\to Y$ entre deux espaces topologiques X et Y est *continue en* $a\in X$ si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Exemples : - toute application constante de X dans Y est continue en tout point de X.
- Si X est discret, toute application de Xdans Y est continue en tout point de X.
- la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1. *Soient* X,Y *espaces topologiques,* $f:X\to Y$*,* $A\subset X$ *et* $\beta\in\overline{A}$*. Si f est continue en* β*, alors* $f(\beta)$ *est adhérent à* $f(A)$.

Proposition 2.2. *Si X est à bases dénombrables de voisinages, une application f de X dans Y est continue en* $a\in X$ *SSI pour toute suite* $(x_n)_n$ *de X convergeant vers a, la suite* $(f(x_n))_n$ *converge vers f(a).*

COMPOSÉE D'APPLICATIONS CONTINUES

Proposition 2.3. *Soient* X,Y,Z *espaces topologiques,* $f:X\to Y$ *et* $g:Y\to Z$*. Si f est continue en* $a\in X$ *et g continue en b=f(a), alors* $g\circ f$ *est continue en a.*

2.2. Continuité globale.

Définition : $f:X\to Y$ est *continue sur* X si elle est continue en tout point de X.

Exemple : $Id:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ est continue ssi la topologie τ_1 est plus fine que τ_2.

Proposition 2.4. *Soient* X,Y,Z *espaces topologiques,* $f:X\to Y$ *et* $g:Y\to Z$*. Si f est continue sur X et g continue sur Y, alors* $g\circ f$ *est continue sur X.*

CARACTÉRISATIONS DE LA CONTINUITÉ GLOBALE

Théorème 2.5. *Soient X, Y espaces topologiques, f application de X dans Y; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue sur X.*
(2) $\forall A \subset X,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
(3) *L'image réciproque par f de tout fermé de X est un fermé de Y.*
(4) *L'image réciproque par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y.*

Application : soit $f : X \overset{continue}{\longrightarrow} \mathbb{R}$; $\{x \in X\,,\ f(x) = 0\}$, $\{x \in X\,,\ f(x) \leq 1\}$ sont des fermés de X, $\{f(x) > 0\}$ est un ouvert de X etc...

CONTINUITÉ ET TOPOLOGIE INDUITE (tout se passe au mieux)

Proposition 2.5. Soit X un espace topologique; la *topologie induite sur $A \subset X$* par celle de X est *la moins fine des topologies sur A rendant continue l'injection canonique $i : A \hookrightarrow X$.*

Proposition 2.6. X et Y espaces topologiques, B sous-espace de Y.
- soit $f : X \to B$ et $\tilde{f} : x \in X \mapsto f(x) \in Y$; *f est continue en $a \in X$ ssi $\tilde{f}$ l'est.*
- *si* $f : X \to Y$ est *continue sur* X et A est sous-espace de X, *la restriction $f|_A$ est continue sur A.*

2.3. Homéomorphismes.

définition : X, Y espaces topologiques; un *homéomorphisme de X sur Y* est une bijection bi-continue de X sur Y.
S'il existe un homéomorphisme de X sur Y on dit que X est homéomorphe à Y ou que X et Y sont homéomorphes; ce qui ne pose pas de problème car la relation "est homéomorphe à" est symétrique; elle est aussi réflexive et transitive (la composée de deux homéomorphismes est un homéomorphisme).

On dit qu'*une propriété (ou une notion) est topologique* si elle est conservée (transportée) par homéomorphisme.

EXEMPLE ET CONTREXEMPLE :

- Soit τ la topologie induite sur $[-1,+1]$ par la topologie euclidienne de $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ la topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$; l'application $\varphi : [-1,+1] \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\varphi(\pm 1) = \pm\infty$ et $\varphi(x) = tg(\frac{\pi}{2}x)$ si $x \in \mathbb{R}$ est un homéomorphisme de $([-1,+1];\tau)$ sur $(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{T})$ (on aurait pu d'ailleurs définir la topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$ en transportant via la bijection φ la topologie τ de $[-1,+1]$).

- f bijection continue $\not\Rightarrow$ f homéomorphisme (contrex. $f : t \in [0, 2\pi[\mapsto exp(it) \in S^1$).

3. Espaces séparés.

3.1. Définition et premières propriétés.

Définition : Un espace topologique (X, T) est *séparé* (ou de Hausdorff) (on dit également : la topologie T est séparée) si, dès que deux points x, y de X sont distincts, il existe un voisinage V de x et un voisinage V' de y tels que $V \cap V' = \emptyset$.

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES, EXEMPLES :

– toute topologie plus fine qu'une topologie séparée est séparée.
– tout sous-espace d'un espace séparé est séparé.
– tout espace métrique est séparé.
– Soit X un ensemble infini; la famille $\mathcal{O} := \{\emptyset\} \cup \{A \subset X\ ,\ X \setminus A$ est fini $\}$ est la famille des ouverts d'une topologie non séparée T_{cof} sur X, appelée topologie cofinie sur X.

Une caractérisation :

Proposition 3.1. *un espace toplogique X est séparé SSI pour tout x de X, l'intersection de tous les voisinages <u>fermés</u> de x est réduite au singleton $\{x\}$.*

REMARQUE : Si un espace est séparé, pour tout x de X l'intersection de tous les voisinages de x est le singleton $\{x\}$; mais la réciproque est fausse (cf. X infini muni de la topologie cofinie).

Corollaire : *dans un espace séparé toute partie finie est fermée.*

3.2. Limites dans les espaces séparés.

Proposition 3.3. *Dans un espace séparé une suite qui converge vers un point limite ℓ possède une seule valeur d'adhérence, à savoir ℓ.*
En conséquence, une suite convergente d'un espace séparé ne possède qu'un point limite.

le dernier résultat de la proposition précédente peut également se déduire de la proposition suivante :

Proposition 3.4. *Soit f une application d'une partie A d'un espace X à valeurs dans Y séparé, et β un point adhérent à A. Si f admet une limite quand x tend vers β en restant dans A, cette limite est unique.*

3.3. Fonctions continues à valeurs dans un espace séparé.

Proposition 3.5. *Soit $f : X \to Y$; si Y est séparé, alors f est continue en a SSI $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.*

Proposition 3.6. *Si f et g sont continues sur X à valeurs dans Y séparé, alors $\{x \in X \, , \, f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.*

On en déduit un résultat de prolongement des identités :

Corollaire 3.7. *Soient f et g continues sur X à valeurs dans Y séparé. Si $f \equiv g$ sur un sous-ensemble G dense dans X, alors $f \equiv g$ sur X.*

ESPACES MÉTRIQUES.

1. Définitions. Propriétés métriques.

Distance. X désigne un ensemble non vide.

DÉFINITION : *On appelle distance sur* X *une application* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*
(D_1) $\forall x, y \in X$: $d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie)*
(D_2) $\forall x, y \in X$: $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$ (axiome de séparation)
(D_3) $\forall x, y, z \in X$: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire)

Le nombre $d(x,y)$ s'appelle distance des points x et y. Un ensemble X muni d'une distance d s'appelle un espace métrique ; on le notera (X,d).

Proposition 1.1 : $\mid d(x,y) - d(x,z) \mid \leq d(y,z)$ $\forall x, y, z \in X$, *avec* (X,d) *espace métrique.*

• BOULES ET SPHÈRES.
Soit $a \in X$ et r réel ≥ 0 :
$B(a,r) = \{x \in X / \, d(x,a) < r\}$ est la boule ouverte de centre a de rayon r

$B'(a,r) = \{x \in X / \, d(x,a) \leq r\}$ est la boule fermée de centre a de rayon r

$S(a,r) = \{x \in X / \, d(x,a) = r\}$ est la sphère de centre a de rayon r.

Si $r = 0$, alors : $S(a,r) = B'(a,r) = \{a\}$, $B(a,r) = \emptyset$.

• DISTANCE INDUITE.
Si $A \subset X$, et si d_A désigne la restriction à $A \times A$ de d, d_A est une distance sur A et (A, d_A) est appelé sous-espace métrique de (X,d).

• EXEMPLES
(1) $X = \mathbb{R}$: $d(x,y) := \mid x - y \mid$; d ainsi définie est une distance sur $\mathbb{R}$ appelée distance euclidienne. La boule ouverte (resp. fermée) de centre a de rayon r est $]a-r, a+r[$ (resp. $[a-r, a+r]$).

(2) $X = \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\psi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, +1]$ la bijection définie par $\psi(y) = \frac{2}{\pi} arctg(y)$ si $y \neq \pm\infty$, $\psi(-\infty) = -1$, $\psi(+\infty) = +1$. posons pour $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$: $\overline{d}(x,y) = \mid \psi(x) - \psi(y) \mid$; alors $\overline{d}$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$.

(3) Distance discrète. Soit X un ensemble non vide. On pose $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$. d est une distance sur X, appelée distance discrète.
Dans un espace métrique discret : $B(a,r) = \{a\}$ si $0 < r \leq 1$, $B(a,r) = X$ si $r > 1$.

(4) Les distances usuelles sur $\mathbb{R}^n$.
Ces distances d_e, d_+ et d_∞ sont définies pour $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ par :
$d_e(x,y) = \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2\right)^{1/2}$ (distance euclidienne)
$d_+(x,y) = \sum_{j=1}^n \mid x_j - y_j \mid$
$d_\infty(x,y) = max_{1 \leq j \leq n} \mid x_j - y_j \mid$.

L'inégalité triangulaire pour d_e repose sur l'inégalité de convexité suivante :
Inégalité de Minkowski : $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *; soit p réel,* $p \geq 1$, $a = (a_1, ..., a_n) \in K^n, b = (b_1, ..., b_n) \in K^n$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \mid a_j + b_j \mid^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \mid a_j \mid^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} \mid b_j \mid^p\right)^{1/p}$$

Remarque : Sur $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, $\delta(z,w) := |z - w|$ est la distance euclidienne.

(5) DISTANCE ASSOCIÉE À UNE NORME SUR UN ESPACE VECTORIEL :

Proposition 1.2. Soit $(E, ||.||)$ un e.v.n..(i.e. E est un espace vectoriel et $||.||$ une norme sur E).
L'application $d : (x,y) \in E \times E \mapsto d(x,y) := ||x - y||$ *est une distance sur* E*, invariante par translation (i.e.* $\forall x, y, z \in E$, $d(x+z, y+z) = d(x,y)$*), appelée distance associée à la norme* $||.||$.

1.2 Distance d'un point à un sous-ensemble

Définition : *Soit* (X,d) *un espace métrique et* A *une partie non vide de* X *; on appelle distance d'un point* x *de* X *à* A *le nombre* $d(x,A) = inf_{a \in A} d(x,a)$.

PROPRIÉTÉ : $| \, d(x,A) - d(y,A) \, | \leq d(x,y)$.

1.3 Parties bornées

Définition : *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X,d) ; le diamètre de A est l'élément de* $\overline{R}_+$ *: diam A* $= sup_{x\in A, y\in A} d(x,y)$.

Remarque : $diam\, B(x,r) \leq 2r$, mais l'inégalité peut être stricte.

Définition : Une partie A de (X,d) est dite *bornée* si elle est vide ou bien de diamètre fini.

Proposition 1.3. : *Une partie d'un espace métrique est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule ouverte.*

1.4 Isométries

Définition : Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. On appelle *isométrie de X sur Y* toute bijection f de X sur Y qui conserve les distances, i.e. : $\forall x, y \in X, \;\; d(x,y) = \delta(f(x), f(y))$.

Remarque : la conservation des distances implique l'injectivité ; on pourrait remplacer "bijection" par "surjection" dans la définition.
EXEMPLES : $\theta : \mathbb{C}$ euclidien $\longrightarrow R^2$ euclidien définie par : $\theta(x + i\,y) = (x,y)$ est une isométrie.
La bijection $\psi : \overline{R} \longrightarrow [-1,+1]$ définie dans le paragraphe 1.1 est une isométrie.

Une *propriété ou notion* est dite *métrique* si elle est conservée par isométrie.

2. Topologie d'un espace métrique

2.1 Définition. Premières propriétés.

Définition : *Soit (X,d) un espace métrique. Pour tout* $x \in X$, *on pose :*
$\mathcal{V}(x) = \{ \, V \subset X \; / \exists r > 0 \, , \, B(x,r) \subset V \, \}$
Il existe sur X une topologie unique $\mathcal{T}_d$ *, appelée topologie associée à la distance d , telle que pour tout x de X,* $\mathcal{V}(x)$ *soit l'ensemble des voisinages de x pour cette topologie.*

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES : chacune des familles suivantes est un s.f.v. de x.
$\{B(x,r)\, , \; r > 0\}$; $\{B'(x,r)\, , \; r > 0\}$; $\{B(x, \frac{1}{n})\, , \; n \in \mathbb{N}^*\}$; $\{B'(x, \frac{1}{n})\, , \; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Proposition 2.1. : *Tout espace métrique est à bases dénombrables de voisinages.*

Proposition 2.2. : *Tout espace métrique est séparé.*

LES OUVERTS D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Rappelons que dans un espace topologique, un ensemble est ouvert SSI il est voisinage de chacun de ses points. Par conséquent :
Une partie A d'un espace métrique (X,d) *est un ouvert pour la topologie* T_d *SSI pour tout x de A il existe une boule* $B(x, r_x)$*, de rayon* $r_x > 0$*, contenue dans A.*

Proposition 2.3 : *Soit* (X,d) *espace métrique.*
(a) *Toute boule ouverte (resp. fermée) de X est un ouvert (resp. un fermé) de X ; toute sphère est un fermé*
(b) *Les ouverts de X sont les réunions de boules ouvertes*

DISTANCES TOPOLOGIQUEMENT ÉQUIVALENTES

Définition : Soit X un ensemble non vide, deux distances d et δ sur X sont *topologiquement équivalentes* si les topologies associées T_d et T_δ sur X sont égales. (i.e. si $Id : (X, T_d) \rightarrow (X, T_\delta)$ est un homéomorphisme).
Exemple : les distances usuelles $d_{eucl.}$, d_+ et d_∞ sur $\mathbb{R}^n$ sont topologiquement équivalentes.

SOUS-ESPACES D'UN MÉTRIQUE :

Proposition 2.4. : *Soit* (X,d) *un métrique, A une partie de X. La topologie sur A associée à la distance induite* $d_A = d|_{A\times A}$ *est exactement la topologie induite sur A par la topologie de X associée à la distance d.*

2.2 Suites, limites et fonctions continues dans les métriques

Dans un métrique (X,d) , pour tout $x \in X$,
La famille de boules $\{\mathbf{B(x,\varepsilon)}\,,\varepsilon > \mathbf{0}\}$ est un s. f. v de x, par suite :

—> Soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace métrique (X,d).
$(x_n)_n$ converge vers x dans (X,d) SSI $\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\,,\ n \geq n_0 \Longrightarrow d(x,x_n) < \varepsilon$.

—> Soient E un espace topologique, (Y,δ) un espace métrique, $A \subset E$, $\beta \in \bar{A}$, $y \in Y$ et une application $f : A \longrightarrow (Y,\delta)$.
$y = \lim\limits_{x\to\beta, x\in A} f(x)$ SSI $\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists V \in \mathcal{V}_E(\beta)\,,\ x \in A \cap V \Longrightarrow \delta(f(x),y) < \varepsilon$.

—> $f : E \longrightarrow (Y,\delta)$ continue en $x \in E$ si ...etc

—> $f : (X,d)$ métrique $\longrightarrow (Y,\delta)$ métrique.
f continue en $a \in X$ SSI $\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\eta(a,\varepsilon) > 0\,,\ d(x,a) < \eta(a,\varepsilon) \Longrightarrow \delta(f(x),f(a)) < \varepsilon$.

Un espace métrique est un espace topologique séparé , d'où :
—> Si une suite converge dans X métrique, sa limite est la seule valeur d'adhérence de cette suite.
—> Si une suite converge dans un métrique (X,d), il y a unicité de la limite.
—> Soit X espace topologique, $A \subset X$, $\beta \in \overline{A}$, (Y,d) espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$; si f admet une limite quand x tend vers β, x restant dans A, cette limite est unique.
—> Si f et g sont continues de X espace topologique dans Y métrique, l'ensemble $\{x \in X\ /\ f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

Un espace métrique X est un espace topologique à bases dénombrables de voisinages, d'où :
—> α est valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ d'un métrique X SSI α est limite d'une sous-suite de $(x_n)_n$.
—> Les parties fermées d'un espace métrique sont celles qui contiennent les limites de leurs suites convergentes.
—> Soit (X,d) espace métrique, $A \subset X$, $\beta \in \overline{A}$, Y espace topologique et $f : X \longrightarrow Y$; alors : $y = \lim_{x\to\beta, x\in A} f(x) \Longleftrightarrow \forall\, (a_n)_n \subset A$ telle que $(a_n)_n$ CV vers β, $(f(a_n))_n$ CV vers y.
—> $f : X$ métrique $\longrightarrow Y$ est continue en $a \in X$ SSI f est séquentiellement continue en a.

ADHÉRENCE DANS UN MÉTRIQUE

Proposition 2.5 : *soit (X,d) un métrique et A une partie de X.*

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\Longleftrightarrow \exists (a_n)_n \subset A \text{ t.q. } \lim_{n\to+\infty} a_n = x \\ &\Longleftrightarrow d(x,A) = 0 \end{aligned}$$

3. Structure uniforme sur un espace métrique.

3.1. Continuité uniforme.

Définition : Soient (X,d) et (Y,δ) des espaces métriques ; une application f de X dans Y est *uniformément continue sur* X si :
$\forall\varepsilon > 0\,, \exists\eta = \eta(\varepsilon) > 0\,, \forall x,x' \in X, d(x,x') < \eta(\varepsilon) \Rightarrow \delta(f(x),f(x')) < \varepsilon$.
Une application uniformémenr continue sur X est continue en tout point de X ; la réciproque est fausse : ainsi les seules fonctions polynomiales réelles uniformément continues sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions affines.
EXEMPLES : une application $f : (X,d) \to (Y,\delta)$ lipschitzienne sur X est uniformément continue sur X.
Rappel : $f(X,d) \to (Y,\delta)$ est lipschitzienne s'il existe $\gamma \geq 0$ tel que $\delta(f(x),f(x')) \leq \gamma\, d(x,x')$, $\forall x,x' \in X$.
Si $A \subset X$, l'application $x \in X \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue sur X.

Proposition 3.1. Soit X,Y,Z des métriques ; si $f : X \to Y$ est uniformément continue sur X et $g : Y \to Z$ uniformément continue sur Y, alors $g \circ f$ est uniformément continue sur X.

3.2. Distances uniformément équivalentes.

Définition : Deux distances d_1 et d_2 sur un ensemble X sont *uniformément équivalentes* si $Id : (X,d_1) \to (X,d_2)$ est uniformément continue sur X ainsi que sa bijection réciproque. On dit alors que d_1 et d_2 définissent sur X la même structure uniforme.

Une condition suffisante :

Proposition 3.2. *Soient d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble X ; s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\alpha d_1 \leq d_2 \leq \beta d_1$, alors d_1 et d_2 sont uniformément équivalente sur X.*

Application : les distances usuelles d_{eucl}, d_+ et d_∞ sur $\mathbb{R}^n$ sont uniformément équivalentes entre elles.

Distances bornées uniformément équivalentes à une distance donnée :

Proposition 3.3. *Soit (X, d) un métrique ; $\delta_1 = \min(1, d)$ et $\delta_2 = \frac{d}{1+d}$ sont des distances sur X, uniformément équivalentes à la distance d.*

Remarque : si d n'est pas bornée, les distances d et $\min(1, d)$ sont uniformément équivalentes sans pour autant satisfaire la condition de la proposition 3.2.

3.3. Autres notions uniformes

La propriété pour une suite d'être une *suite de Cauchy*, la propriété de *complétude* pour un espace métrique sont des propriétés uniformes. i.e. conservées par toute bijection bi-uniformément continue (f et f^{-1} uniformément continues) ; nous y reviendrons plus longuement au chapitre sur la complétude.

Définition. Une suite $(x_n)_n$ d'un métrique (E, d) est une *suite de Cauchy* si
$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\,,\ \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$

Définition. Un espace métrique X est *complet* si toute suite de Cauchy de X converge dans X.

4. Distance de la convergence uniforme.

X est un ensemble non vide, (Y, d) un métrique.
$Y^X = \mathcal{F}(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications de X dans Y, $\mathcal{B}(X, Y)$ celui des applications bornées de X dans Y ;
si X est un espace topologique, on note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y.

On pose pour $f, g \in \mathcal{F}(X, Y)$:

$$e_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \quad \text{et} \quad \delta(f, g) = min(1, e_\infty(f, g).$$

e_∞ satisfait les axiomes de séparation et de symétrie, l'inégalité triangulaire, mais $e_\infty(f, g)$ peut être infini ; on dit que e_∞ est un écart sur $\mathcal{F}(X, Y)$.

Proposition 4.1. *L'application δ définit une distance sur $\mathcal{F}(X, Y)$, la distance de la convergence uniforme ; la topologie associée est appelée topologie de la convergence uniforme.*
Sur $\mathcal{B}(X, Y)$, δ et e_∞ sont deux distances uniformément équivalentes.

Proposition 4.2. *$\mathcal{F}(X, Y)$ est muni de la topologie de la cv uniforme.*

(a) L'ensemble $\mathcal{B}(X, Y)$ des applications bornées de X dans Y est fermé dans $\mathcal{F}(X, Y)$.

(b) Si X est un espace topologique, l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des applications continues de X dans Y est fermé dans $\mathcal{F}(X, Y)$.

TOPOLOGIE PRODUIT.

Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques. Quelle topologie "produit" raisonnable définir sur $X_1 \times X_2$? Il faudrait en particulier que la topologie produit sur $\mathbb{R}_{eucl} \times \mathbb{R}_{eucl}$ coïncide avec la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$. Comme $(x^{(n)}, y^{(n)})_n$ converge vers (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ ssi $x^{(n)} \to a$ et $y^{(n)} \to b$ dans $\mathbb{R}_{eucl}$, les projections $pr_j : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_j \in \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (car séquentiellement continues sur $\mathbb{R}^2$ métrique).
On va munir $X_1 \times X_2$ de la topologie la moins fine rendant continues les projections. Pour une telle topologie, la famille $\mathcal{B} := \{\omega_1 \times \omega_2 \,|\, \omega_j$ ouvert de $X_j \,, j = 1,2\}$ doit être contenue dans la famille des ouverts.

1. Définition. Premières propriétés.

Proposition-définition 1.1. *Soient (X_1, T_1) et (X_2, T_2) des espaces topologiques de familles d'ouverts respectives $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$. Notons $\mathcal{B} = \{\omega_1 \times \omega_2 \,|\, \omega_j \in \mathcal{O}_j \,, j = 1,2\}$.*
L'ensemble $\mathcal{O}$ des parties de $X = X_1 \times X_2$ formé des unions d'éléments de $\mathcal{B}$ est la famille des ouverts d'une topologie sur X, appelée topologie produit sur X et notée $T_1 \times T_2$; l'espace $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ est l'espace (topologique) produit de (X_1, T_1) et (X_2, T_2).
La famille $\mathcal{B}$, dont les éléments sont appelés ouverts élémentaires de X, forme une base d'ouverts de la topologie produit.
La topologie produit est la moins fine des topologies sur X rendant continues les projections $pr_j : (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2) \to (X_j, T_j)$, j=1,2.

Remarques : (1) la définition ci-dessus se généralise sans peine à un produit fini de m espaces, $m \geq 2$.
(2) un ouvert d'un espace produit n'est pas nécessairement un produit d'ouverts.
(Rappel : une partie A du produit $E_1 \times E_2$ de deux ensembles E_1 et E_2 est un produit d'ensembles ssi $A = pr_1(A) \times pr_2(A)$).

VOISINAGES DANS UN ESPACE PRODUIT

Proposition 1.2. *X_1, et X_2 espaces topologiques, $a = (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$ muni de la topologie produit de celles de X_1 et X_2.*
(1) *Si V_j est voisinage de a_j dans X_j, j=1,2 alors $V_1 \times V_2$ est voisinage de a dans $X_1 \times X_2$.*
(2) *$\{\omega = \omega_1 \times \omega_2 \in \mathcal{B} \,|\, a \in \omega\}$ est s.f.v. de a dans $X = X_1 \times X_2$.*
$\{V_1 \times V_2 \,|\, V_j \in \mathcal{V}_j(a_j) \,, j = 1,2\}$ est un s.f.v. de a dans X.
Si $\mathcal{S}_j(a_j)$ est un s.f.v. de a_j dans X_j alors $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 := \{W_1 \times W_2 \,|\, W_j \in \mathcal{S}_j(a_j)\}$ est un s.f.v. de a dans X.
(3) *$X_1 \times X_2$ est à systèmes fondamentaux dénombrables de voisinages SSI X_1 et X_2 le sont.*

EXEMPLES :
– la topologie produit $T_{\mathbb{R}} \times ... \times T_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$ est identique à la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$.
– la topologie produit sur le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ est égale à la topologie induite sur cet ensemble par celle de $\mathbb{R}^3$.

et, plus généralement :

SOUS-ESPACES D'UN ESPACE PRODUIT

Soit (X_j, T_j), j=1,2 des espaces topologiques, A_j sous-espace de X_j, j=1,2 ; on note $\tau_j = T_j|_{A_j}$ la topologie induite sur A_j ; la topologie produit $\tau_1 \times \tau_2$ sur $A_1 \times A_2$ coïncide avec la topologie induite sur $A_1 \times A_2$ par la topologie produit $T_1 \times T_2$ de $X_1 \times X_2$.

"ASSOCIATIVITÉ" DU PRODUIT D'ESPACES.

Soient X_1, X_2 et X_3 des espaces topologiques ; les bijections canoniques entre $X_1 \times (X_2 \times X_3)$, $(X_1 \times X_2) \times X_3$ et $X_1 \times X_2 \times X_3$ sont des homéomorphies.

PROPRIÉTÉS DES PROJECTIONS ET CONSÉQUENCES.

DÉFINITION : une application $f : Y \to Z$ entre deux espaces topologiques est *ouverte* si l'image par f de tout ouvert de Y est un ouvert de Z.

Soient X_j, j=1,2 des espaces topologiques ; les projections $pr_j : X_1 \times X_2 \to X_j$, j=1,2, sont *continues et ouvertes.*

un résultat souvent utile sur les coupes :

Proposition 1.3. *Soient X_1 et X_2 des espaces topologiques non vides. Pour tout $a = (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$, l'espace produit $X_1 \times \{a_2\}$ est homéomorphe à X_1 (et $\{a_1\} \times X_2$ homéomorphe à X_2).*

Remarques : (1) la projection d'un fermé n'est pas nécessairement un fermé.
(2) pr_1 est continue, ouverte, surjective de $X_1 \times X_2$ sur X_1 mais n'est pas une homéomorphie si X_2 n'est pas un singleton.

Adhérence, intérieur dans un espace produit.
Proposition 1.4. *Soit X_j un espace topologique et A_j une partie de X_j , j=1,2.*

$$\overset{\circ}{\overline{A_1 \times A_2}} = \overset{\circ}{A_1} \times \overset{\circ}{A_2} \qquad et \qquad \overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$$

Corollaire 1.5. *Dans un espace produit, tout produit de fermés est un fermé.*

Réciproque fausse.

Rmq : en général : $Fr\,(A_1 \times A_2) \neq Fr(A_1) \times Fr(A_2)$.

2. Applications et espaces produits.

2.1. Applications à valeurs dans un produit.

Proposition 2.1. *Une suite $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})_n$ de $X_1 \times X_2$ converge vers $x = (x_1, x_2)$ SSI les deux suites $(x_1^{(n)})_n$ et $(x_2^{(n)})_n$ convergent resp. vers x_1 et x_2.*

Et, plus généralement :
Proposition 2.2. *Soient X_1, X_2 et E des espaces topologiques, $A \subset E$, $\beta \in \bar{A}$, et $f : y \in E \mapsto f(y) = (f_1(y), f_2(y)) \in X_1 \times X_2$. Alors, f admet une limite $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ quand x tend vers β en restant dans A SSI f_j admet ℓ_j pour limite quand x tend vers β en restant dans A.*

Proposition 2.3. *Soit $f : E \to X_1 \times X_2$.*
f continue en $a \in E \iff$ les applications composantes $f_j = pr_j \circ f$, j=1,2, sont continues en a.
f est continue sur $E \iff$ ses applications composantes f_1 et f_2 sont continues sur E.

2.1. Applications définies sur un espace produit.

DÉFINITION : Soit $f : X_1 \times X_2 \to Y$ et $a = (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$; l'application $f(a_1, .) : v \in X_2 \mapsto f(a_1, v) \in Y$ est *l'application partielle en a de f relativement à la seconde variable*, l'application $f(., a_2) : u \in X_1 \mapsto f(u, a_2) \in Y$ l'application partielle en a relativement à la première variable.

Proposition 2.4. *Soit X_1, X_2 et Y des espaces topologiques et f une application de $X_1 \times X_2$ dans Y. Si f est continue en $a \in X_1 \times X_2$, alors les applications partielles $f(., a_2)$ et $f(a_1, .)$ sont continues respectivement en a_1 et a_2.*

Réciproque fausse !

3. Produit d'espaces et espaces séparés.

Proposition 3.1. *Soient X_1, X_2 des espaces topologiques non vides ; le produit $X_1 \times X_2$ est séparé SSI chacun des espaces facteurs X_1 et X_2 est séparé.*

Proposition 3.2. *Un espace X est séparé SSI la diagonale $\Delta := \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ est fermée dans l'espace produit $X \times X$.*

Proposition 3.3. *Soient X, Y des espaces topologiques non vides et f une application de X dans Y ; si Y est séparé le graphe de f est fermé dans le produit $X \times Y$.*

Réciproque fausse.

4. Produit d'espaces métriques.

PRODUIT FINI
Soient $(E_j, d_j)\,, j = 1, .., n$ des espaces métriques et $E = \prod_{j=1}^{n} E_j$; pour $x = (x_1, ..., x_n)\,, y = (y_1, ..., y_n) \in E$, on pose :

$$\delta_\infty = \underset{1 \leq j \leq n}{max}\, d_j(x_j, y_j)\ ; \qquad \delta_e(x, y) = \big(\sum_{j=1}^{n} (d_j(x_j, y_j))^2\big)^{1/2}\ ; \qquad \delta_+(x, y) = \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j).$$

Proposition 4.1. *Les applications δ_∞ , δ_e et δ_+ définissent sur $E = \prod_{j=1}^{n} E_j$ trois distances uniformément équivalentes ; la topologie associée à l'une de ces distances est la topologie produit sur E. Les projections sont uniformément continues sur E muni de l'une de ces trois distances.*

Proposition 4.2. *Soit (X,d) un métrique ; l'espace produit $X \times X$ est muni de l'une des distances usuelles (δ, δ_∞ ou δ_+) ; l'application distance $d : (x,x') \in X \times X \mapsto d(x,x')$ est uniformément continue sur $X \times X$.*

Proposition 4.3. *Soient (X,d), (E_j, d_j) , $j = 1, ...n$ des métriques ; une application $f : X \to E = \prod_{j=1}^n E_j$ est uniformément continue SSI toutes ses applications composantes $pr_j \circ f$ le sont.*

PRODUIT INFINI DÉNOMBRABLE DE MÉTRIQUES.

Rappel : si (E, d) est un métrique, il existe une métrique bornée sur E et uniformément équivalente à d.

Proposition 4.4. *Soit $(E_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de métriques, avec pour tout n, $d_n \leq 1$. On pose pour $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n \in E = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$: $\delta(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}$; l'application δ est une distance sur E et la topologie associée est la topologie produit sur E.*
Les projections pr_n sont uniformément continues ; une application f définie sur un métrique X à valeurs dans $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est uniformément continue ssi chaque application composante $pr_n \circ f$ est uniformément continue.

COMPLÉTUDE - APPLICATIONS.

1. Suites de Cauchy. Espaces complets.

Définition. Une suite $(x_n)_n$ d'un métrique (E, d) est une *suite de Cauchy* si
$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) : d(x_n, x_m) < \varepsilon$
ou encore si
$\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\sup\limits_{p\geq 0} d(x_n, x_{n+p})\big) = 0.$

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES :
Toute suite de Cauchy est bornée
Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même une suite de Cauchy.
Toute suite convergente est de Cauchy.

Proposition 1.1. *Soit E un métrique. Une suite de Cauchy de E est convergente SSI elle possède une valeur d'adhérence (une sous-suite convergente donc).*

Proposition 1.2. *Soient (X, d) et (Y, δ) des espaces métriques.*
(a) Si f est uniformément continue de X dans Y et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de X, alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de Y.
(b) Si d_1 et d_2 sont des distances uniformément équivalentes sur X, les espaces (X, d_1) et (X, d_2) possèdent les mêmes suites de Cauchy.

Remarque : d et d' topologiquement équivalentes sur $X \not\Longrightarrow$ (X, d) et (X, d') ont les mêmes suites de Cauchy. (contrex. : $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x-y|$, $d'(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$) ; $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d')$ mais non dans $(\mathbb{R}, d)$.

Définition. Un espace métrique (E, d) est *complet* si toute suite de Cauchy de (E, d) converge dans E.

Proposition 1.3. *Si f est une bijection bi-uniformément continue de (X,d) sur $(Y, d\delta)$, et si (X,d) est complet, alors (Y, δ) l'est également.*
En particulier, si d et d' sont des distances uniformément équivalentes sur X, (X, d) est complet ssi (X, d') l'est.

Proposition 1.4. (analogue du thm des segments emboités)*Soit (X, d) métrique complet et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de X telle que diam $F_n \to 0$ quand $n \to 0$, alors l'intersection des F_n est réduite à un singleton.*

Proposition 1.5. (critère de Cauchy pour les fcts) *Soit X espace topologique à bases dénombrables de voisinages, $A \subset X$, $\beta \in \bar{A}$, (Y, d) un espace métrique complet et f une application de A dans Y. Alors :*
f admet un point limite quand $x \to \beta$, $x \in A$
SSI $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists V$ voisinage de β tel que $x, x' \in V \cap A \Longrightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

2. Sous-espaces, espaces produits et complétude.

Définition : Une partie A d'un métrique E est une *partie complète* de E si A muni de la distance induite est un métrique complet.

Proposition 2.1. *(a) Toute partie complète d'un métrique X est fermée dans X.*
(b) Toute partie fermée d'un métrique complet X est une partie complète de X.
Donc dans un métrique complet, les parties complètes sont les parties fermées.

Proposition 2.2. *Un produit fini ou infini dénombrable de métriques muni de l'une des distances usuelles est complet SSI chacun des espaces facteurs est complet.*

CONSÉQUENCE : Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est complet.

3. Espaces de fonctions.

X est un ensemble non vide, (Y, d) un métrique. L'ensemble $Y^X = \mathcal{F}(X, Y)$ des applications de X dans Y est muni de la topologie de la convergence uniforme, associée à la distance δ (de la cv uniforme) définie par $\delta(f, g) = min(1, e_\infty(f, g)$, où $e_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} d(f(x), g(x)) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposition 3.1. *$\mathcal{F}(X, Y)$ est muni de la topologie de la cv uniforme.*
(a) L'ensemble $\mathcal{B}(X, Y)$ des applications bornées de X dans Y est fermé dans $\mathcal{F}(X, Y)$.
(b) Si X est un espace topologique, l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des applications continues de X dans Y est fermé dans $\mathcal{F}(X, Y)$

Théorème 3.2. *Si l'espace (Y, d) est complet, $\mathcal{F}(X, Y)$ muni de la distance δ de la convergence uniforme est complet.*

Corollaire 3.3. *Soit X ensemble non vide, (Y, d) métrique complet ; $(\mathcal{B}(X, Y), e_\infty)$ est complet.*
Si de plus X est un espace topologique, l'espace $(\mathcal{C}(X, Y), \delta)$ est complet.

4. Prolongement d'applications uniformément continues.

Théorème 4.1. *Soit A une partie partout dense dans un métrique X et soit f une application uniformément continue sur A à valeurs dans un métrique complet Y. Il existe une unique application continue F de X dans Y dont la restriction à A soit f; de plus cette application F est uniformément continue sur X.*

Proposition 4.2.(complété d'un métrique) *Soit (E, d) un espace métrique non vide. Il existe un métrique complet $(\hat{E}, \delta)$ et un application $\Phi : E \to \hat{E}$ tels que $\Phi(E)$ soit dense dans $\hat{E}$ et que Φ conserve les distances (i.e. $\forall x, y \in E$, $\delta(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y)$). $(\hat{E}, \delta)$ est appelé un complété de (E, d).*
Un tel complété est unique à bijection isométrique près.

5. Théorème du point fixe de Picard-Banach.

Une application f d'un ensemble non vide X dans lui-même admet α pour *point fixe dans X* si $\alpha \in X$ et $f(\alpha) = \alpha$.
Soit (X, d) et (Y, δ) deux métriques. Une application $f : X \to Y$ est *contractante* s'il existe un réel k, $0 \leq k < 1$ tel que $\delta(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$.

Théorème 5.1. (thm du point fixe de Picard) *Soit (X, d) un métrique complet (non vide) et $f : X \to X$ une application contractante. Alors f admet dans X un point fixe unique α ; pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérées $(x_n = f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α ; de plus $d(\alpha, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1)\, \forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Généralisations :

Corollaire 5.2. *Soit (X, d) un métrique complet (non vide) et $f : X \to X$; s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante, alors f admet dans X un point fixe unique α et pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérées $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α.*

Corollaire 5.3.(thm du point fixe avec paramètre) *Soient (X, d) un métrique complet (non vide), Λ un espace topologique et $f : X \times \Lambda \to X$. On suppose que :*
(i) $\exists k \in [0, 1[$ *tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $f(., \lambda)$ est contractante de rapport k*
(ii) *pour tout x de X, $f(x, .)$ est continue.*
Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $f(., \lambda)$ admet un point fixe unique α_λ et l'application $\lambda \to \alpha_\lambda$ est continue sur Λ.

COMPACITÉ

1. Définitions. Propriétés générales.

RECOUVREMENTS :

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble X est un *recouvrement de* X si $\cup_{i\in I}A_i = X.$;
si $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X et $J \subset I$ tel que $\cup_{i\in J}A_i = X$ (resp. $J \subset I$, J fini, tel que $\cup_{i\in J}A_i = X$) on dit que $(A_i)_{i\in J}$ est un *sous-recouvrement* de $(A_i)_{i\in I}$ (resp. un sous-recouvrement fini de $(A_i)_{i\in I}$).

ESPACES COMPACTS :

DÉFINITION : Un espace topologique X est *compact* s'il est séparé et si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue).

Définition equivalente : un espace est *compact* ssi il est séparé et si pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés d'intersection $\cap_{i\in I}F_i$ vide, on peut extraire une sous-famille finie $(F_i)_{i\in J}$ dont l'intersection $\cap_{i\in J}F_i$ est vide.

La compacité est une propriété topologique : si deux espaces X et Y sont homéomorphes, X est compact ssi Y l'est. (cf. thm 4.1. ci-après).

Exemples : Un espace fini séparé est compact. Un espace discret est compact ssi il est fini. $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact.

Proposition 1.1. *Si X est un espace compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de X, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n \neq \emptyset$.*

2. Suites dans les compacts

Théorème 2.1. : *(a) Toute suite d'un espace compact possède au moins une valeur d'adhérence.*
(b) une suite d'un espace compact converge SSI elle admet une et une seule valeur d'adhérence.

Corollaire 2.2. : *Soit X espace compact à bases dénombrables de voisinages.*
Toute suite de X admet une sous-suite convergente ; et une suite de X converge SSI toutes ses sous-suites qui sont convergentes (et il en existe au moins une) convergent vers la même limite.

Proposition 2.3.(thm de Bolzano-Weierstrass) : *Dans un espace compact X toute partie infinie admet au moins un point d'accumulation dans X.*

3. Parties compactes.

DÉFINITION : Si X est un espace topologique et $A \subset X$, A est une *partie compacte de* X (ou encore un compact de X) si le sous-espace A est compact.

UNE CARACTÉRISATION bien utile :

une partie A d'un espace X est compacte SSI A est séparée et pour toute famille $(\omega_i)_{i\in I}$ d' ouverts de X telle que $A \subset \cup_{i\in I}\,\omega_i$, il existe une sous-famille finie $(\omega_i)_{i\in J}$ telle que $A \subset \cup_{i\in J}\,\omega_i$
(terminologie : on dit alors que $(\omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de A par des ouverts de X).

EXEMPLE :

Si $(a_n)_n$ est une suite convergente, de limite ℓ, d'un espace séparé X, alors $A = \{a_n\,,\, n \in_N\} \cup \{\ell\}$ est une partie compacte de X.

Remarque : par transitivité des topologies induites, si $A \subset X \subset Y$, A est un compact de X ssi A est un compact de Y.

Théorème 3.1.(théorème de Heine-Borel-Lebesgue) *Tout intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.*

Conséquence : la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est compacte car homéomorphe à $[-1,1]$.

Proposition 3.2.(a) *dans un espace séparé, toute partie compacte est fermée.*
(b) *dans un espace compact, toute partie fermée est compacte.*
(c) *Dans un espace compact, une partie est compacte ssi elle est fermée.*

Corollaire 3.3. *Les parties compactes de $\mathbb{R}$ euclidien sont les parties fermées bornées.*

PROPRIÉTÉS DE STABILITÉ :

Proposition 3.4.*Dans un espace séparé X :*
(a) *une union finie de parties compactes est compacte.*
(b) *L'intersection d'une famille non vide de parties compactes est compacte.*

4. Applications continues et compacité.

Théorème 4.1. *Soient X et Y espaces topologiques ; si Y est séparé et f une application continue de X dans Y, l'image par f de toute partie compacte de X est une partie compacte de Y.*
Si X et Y sont deux espaces homéomorphes, X est compact ssi Y l'est.

en général : une bijection continue n'est pas bi-continue ; cependant :

Corollaire 4.2. *Soient X espace compact et Y espace séparé ; si f est une bijection continue de X sur Y, alors f est un homéomorphisme (et donc Y est un espace compact).*

Théorème 4.3.(théorème des bornes atteintes) *Si f est continue sur X compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

5. Espaces métriques compacts.

5.1. Caractérisation de la compacité pour les métriques.
Notion de précompacité.

Définition : Un métrique (E,d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $A(\varepsilon)$ de E telle que $E = \cup_{x \in A(\varepsilon)} B(x, \varepsilon)$.

DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES :
(E, d) précompact SSI $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\varepsilon)$ partie finie de E telle que $\forall x \in E$, $d(x, \mathcal{R}) \leq \varepsilon$. ($\mathcal{R}$ est appelé un ε-réseau pour E)
(E, d) précompact SSI $\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties de diamètre $\leq \varepsilon$.

Rmq : tout espace métrique compact est précompact.

EXERCICE (Séparabilité et précompacité.)Tout espace métrique précompact est séparable.

Théorème 5.1. : *Soit (E,d) un métrique. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *(E, T_d) est compact.*
(2) *(E,d) est précompact* ET *complet*
(3) *Toute partie infinie de E admet (au moins) un point d'accumulation.*
(4) *De toute suite de points de E on peut extraire une sous-suite convergente.*

REMARQUE : Si X est un espace topologique non métrisable, on a seulement les implications suivantes :
X compact $\Longrightarrow$ toute suite de X admet une v.a.
X compact $\Longrightarrow$ toute partie infinie de X admet un point d'accumulation.

Le lemme ci-dessous, intéressant en lui-même, sera utilisé dans la preuve de l'une des implications du thm.

Lemme 5.2. : *Soit (E, d) métrique non vide tel que toute suite de E admette une sous-suite convergente et $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. Il existe un réel $\lambda > 0$, appelé nombre de Lebesgue de ce recouvrement, tel que*

$$\forall x \in E \, , \exists i(x) \in I \ \text{ t.q. } \ B(x, \lambda) \subset \Omega_{i(x)}$$

5.2. Parties précompactes ou compactes d'un métrique.

Proposition 5.3. : *Soit (E, d) un métrique et $A \subset E$.*
A partie compacte de $E \Longrightarrow A$ partie fermée bornée de (E, d) .

DÉFINITION : Une partie A d'un métrique (E, d) est dite précompacte si le sous-espace métrique (A, d_A) est précompact.

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES : Toute partie d'un espace précompact est précompacte.
A partie précompacte SSI $\overline{A}$ est précompacte.
A partie précompacte de $(E, d) \Longrightarrow A$ partie bornée de (E, d). (réciproque fausse en général)

Proposition 5.4. : (a) Soit (E, d) métrique complet : une partie de E est précompacte SSI elle est relativement compacte (i.e. $\overline{A}$ est compacte)
(b) Soit (E, d) métrique compact et A une partie de E :
A compacte $\Longleftrightarrow A$ fermée $\Longleftrightarrow A$ complète
(c) Dans $\mathbb{R}$ euclidien : A partie précompacte de $\mathbb{R} \Longleftrightarrow A$ partie bornée de $\mathbb{R}$.

5.3. Théorème de Heine et applications.

Théorème 5.3.(thm de Heine) : *Soit (E, d) un métrique compact et (Y, δ) un métrique. Toute application f continue sur E à valeurs dans Y est uniformément continue sur E.*

Corollaire 6.4. *: (a) Soit (E, d) un métrique compact et (Y, δ) un métrique. Si une application f est continue sur E, bijective de E sur Y, alors f est bi-uniformément continue.*
Sur (E,d) compact, deux distances topologiquement équivalentes sont uniformément équivalentes.

Proposition 5.6. *: Une fonction continue sur $[a, b]$ intervalle compact de $\mathbb{R}$ est approximable uniformément sur $[a, b]$ par des fonctions continues, affines par morceaux sur $[a, b]$.*

6. Produit d'espaces compacts

Théorème 6.1.*(Tychonoff) : Un produit fini d'espaces compacts non vides est compact SSI chaque espace facteur est compact.*

Corollaire 6.2. *: Une partie de $\mathbb{R}^n$ euclidien ($n \in \mathbb{N}^*$) est compacte SSI elle est fermée et bornée.*

PRODUIT (INFINI) DÉNOMBRABLE DE MÉTRIQUES COMPACTS.

Théorème 6.3. *: Soient (E_n, d_n), $n \in \mathbb{N}^*$ des métriques non vides. $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ est muni de la topologie produit (associée à la distance $\delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{min(1, d_n(x_n, y_n))}{2^n}$).*
L'espace E est compact SSI chaque espace facteur E_n l'est.

7. Théorèmes d'approximation de Weierstrass et Stone-Weierstrass.

7.1 Le théorème classique de Weierstrass.

Théorème 7.1. *: Toute fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.*

Le thm découle des trois lemmes suivants.

Lemme 7.2. *(a) la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est limite uniforme sur $[-1, +1]$ d'une suite de polynômes en x.*
(b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ chacune des fonctions $x \mapsto |x - \alpha|$ et $x \mapsto (x - \alpha)^+$ est limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite de polynômes.

Lemme 7.3. *: Une fonction φ continue, affine par morceaux sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme : $\varphi(x) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x - a_i)^+$, où les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $a_1 = a < a_2 < ... < a_n = b$.*

Lemme 7.4. *: Une fonction continue sur $[a, b]$ intervalle compact de $\mathbb{R}$ est approximable uniformément sur $[a, b]$ par des fonctions continues, affines par morceaux sur $[a, b]$.*

7.2. Le théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 7.5. *: Soit X un espace compact, l'espace $E := \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur X à valeurs réelles est muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. On suppose que*
(i) $\mathcal{A}$ contient les fonctions constantes
(ii) $\mathcal{A}$ sépare les points de X (i.e. si $\alpha, \beta \in X$, $\alpha \neq \beta$, il existe $u \in \mathcal{A}$ telle que $u(\alpha) \neq u(\beta)$
Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $E = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

REMARQUE : En fait, la conclusion du thm reste inchangée si l'on remplace la condition (i) par la condition, plus générale, suivante : $\forall x \in X$, $\exists u \in \mathcal{A}$, $u(x) \neq 0$; mais la preuve du lemme d'interpolation 7.6 ci-dessous est plus compliquée (cf. Choquet, Topologie ou bien Wagschal, Topologie et Analyse fonctionnelle)

Lemme 7.6 : *Sous les hypothèses du thm 7.5, si $f \in E$ et α, $\beta \in X$, il existe $g_{\alpha,\beta} \in \mathcal{A}$ telle que $g_{\alpha,\beta}(\alpha) = f(\alpha)$ et $g_{\alpha,\beta}(\beta) = f(\beta)$*

Lemme 7.7 : *l'adhérence $\bar{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de E possédant les propriétés suivantes de stabilité :*
$f \in \bar{\mathcal{A}} \Longrightarrow |f| \in \bar{\mathcal{A}}$;
$f, g \in \bar{\mathcal{A}} \Longrightarrow max(f, g) \in \bar{\mathcal{A}}$ et $min(f, g) \in \bar{\mathcal{A}}$

7.3. Applications.

Thm de Weierstrass version complexe :

Théorème 7.8 : *Soit X un espace compact, l'espace $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur X à valeurs complexes est muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. On suppose que*

(i) $\mathcal{A}$ contient les fonctions constantes

(ii) $\mathcal{A}$ sépare les points de X

(iii) $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison (i.e. $f \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$)

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

thm d'approximation polynomiale de Weierstrass :

Théorème 7.9 : *Toute fonction continue sur un compact K de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles est limite d'une suite de polynômes (en les variables $x_1, ..., x_n$) qui converge uniformément sur K.*

thm d'approximation trigonométrique :

Théorème 7.10 : *Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, périodique de période 2π est limite d'une suite de polynômes trigonométriques, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

1. Espaces et parties connexes.

Définition et premières propriétés.

définition : Un espace topologique X est *connexe* s'il n'est pas réunion disjointe de deux ouverts non vides.
ou : s'il n'est pas réunion disjointe de deux fermés non vides.
ou encore : si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X.

La connexité est une propriété topologique :

proposition 1.1 Si X et Y sont des espaces topologiques homéomorphes, alors X est connexe SSI Y l'est.

Proposition 1.2. *Un espace X est connexe SSI toute application continue de X dans l'espace discret* $\{0,1\}$ *est constante.*

parties connexes

Définition Soit X un espace topologique et $A \subset X$; A est une *partie connexe* de X (on dit aussi un connexe de X) si le sous-espace A de X est connexe.
Remarque : par transitivité des topologies induites, si Y est un sous-espace de X, les connexes de Y sont les connexes de X inclus dans Y.

Proposition.("passage de frontière") *Soient A et B parties de X espace topologique. Si B est connexe et rencontre à la fois A et* $X \setminus A$*, alors B rencontre la frontière de A.*

Proposition 1.3. *Les parties connexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

$\mathbb{R}$ est connexe, $\mathbb{Q}$ ne l'est pas ; $\overline{\mathbb{R}}$ est connexe car homéomorphe à $[-1,+1]$.

Image continue d'un connexe.

Théorème 1.4. *L'image d'un espace connexe X par une application continue f de X dans Y est un connexe de Y.*

Corollaire 1.5.(thm des valeurs intermédiaires) *Soit f continue sur X connexe et à valeurs réelles ; si a et b sont deux valeurs prises par f, tout réel compris entre a et b est une valeur prise par f.*

propriétés de stabilité

Proposition 1.6. *Soit* $\mathcal{A}$ *une famille non vide de parties connexes d'un espace X telle que pour tous* $A, B \in \mathcal{A}$*, il existe une famille finie* $A_0, ...A_n$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *vérifiant* $A_0 = A, A_n = B$ *et* $\forall i = 0, ..., n-1$: $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ *; alors la réunion de tous les éléments de* $\mathcal{A}$ *est connexe.*
En particulier, si $\mathcal{A}$ *est une famille de connexes d'intersection non vide, alors* $\cup_{A\in\mathcal{A}} A$ *est connexe.*

remarque : En général l'intersection de deux connexes n'est pas connexe (ex. : deux cercles sécants de $\mathbb{R}^2$.)

Proposition 1.7. *Soit X un espace topologique et A une partie connexe de X. Si* $A \subset B \subset \overline{A}$*, alors B est connexe.*
En particulier, l'adhérence d'un connexe est connexe.

Remarque : ni l'intérieur, ni la frontière d'un connexe ne sont en général connexes.

Théorème 1.8. *Un produit fini d'espaces connexes est connexe si et seulement si chacun des espaces facteurs est connexe.*

Conséquence : pour tout $n \geq 1$, l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est connexe.

2. Composantes connexes.

Proposition-définition 2.1. : *Soit X un espace topologique non vide ; la relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur X définie par*

$x \mathcal{R} y$ *SSI il existe A partie connexe de X contenant x et y*

est une relation d'équivalence sur X. Si $x \in X$*, la classe d'équivalence de x suivant* $\mathcal{R}$ *est appelée composante connexe de x dans X et on dit que c'est une des composantes connexes de X (c.c. en abrégé). L'ensemble des différentes composantes connexes de X forme une partition de X.*

Proposition 2.2. : *Soit X un espace topologique non vide ; la composante connexe d'un point x de X est la plus grande partie connexe de X contenant le point x ; c'est un fermé de X.*

EX. : La composante connexe dans $\mathbb{Q}$ de $r \in \mathbb{Q}$ est le singleton $\{r\}$ (puisque les seules parties connexes non vides de $\mathbb{R}$ contenues dans $\mathbb{Q}$ sont les singletons) ; on dit que $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu.

REMARQUE : une c..c de X n'est en général pas un ouvert de X. Toutefois :

Proposition 2.3. : Si X est un espace *localement connexe* (i.e. si tout point de X possède un système fondamental de voisinages connexes), alors les composantes connexes d'un <u>ouvert</u> Ω de X sont des ouverts (de X et de Ω).

Proposition 2.4. : *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints.*

Proposition 2.5. : *Soit X et Y espaces topologiques, f un homéomorphisme de X sur Y et A une partie non vide de X. Alors si $C(x)$ est la composante connexe dans A de $x \in A$, $f(C(x))$ est la composante connexe dans $f(A)$ de $f(x)$; l'ensemble des c.c. de A et celui des c.c. de $f(A)$ ont le même cardinal.*

APPLICATIONS : - Le cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 + y^2 = 1\}$ n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ne sont pas homéomorphes.

3. Connexité par arcs

DÉFINITION : Soit X un espace topologique non vide ; on appelle *chemin continu* ou simplement *chemin* de X toute application continue γ de l'intervalle $[0, 1]$ dans X ; $\gamma([0, 1])$ est l'image du chemin, $\gamma(0)$ en est l'origine, $\gamma(1)$ l'extrémité.

—> L'image $\gamma([0, 1])$ est un connexe de X.

DÉFINITION : Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins de X tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, on définit le chemin juxtaposé de γ_1 et γ_2, noté γ_1 v γ_2, ainsi :

$\gamma_1 \text{ v } \gamma_2(t) = \gamma_1(t)$ si $0 \leq t \leq 1/2$ et
$\gamma_1 \text{ v } \gamma_2(t) = \gamma_2(2t - 1)$ si $1/2 \leq t \leq 1$.

On vérifie que γ_1 v γ_2 est continu sur X. (exo.)

DÉFINITION : un espace X est *connexe par arcs* si pour tous points x, y de X, il existe un chemin de X d'origine x d'extrémité y.

EXEMPLES : le cercle S^1 est connexe par arcs.
une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement d'un e.v.n.) est connexe par arcs.

Proposition 3.1. : *Soient X et Y des espaces topologiques et f une application continue de X dans Y. Si X est connexe par arcs, l'image $f(X)$ est une partie connexe par arcs de Y. Si f est un homéomorphisme, X est connexe par arcs SSI Y l'est.*

Proposition 3.2. : *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

Attention : la réciproque est fausse. Contrex. : Soit $A = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \{(x, x/n) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 0 \leq x \leq 1\}$ et $B = [1/2, 1] \times \{0\}$; $A \cup B$ est connexe mais n'est ni connexe par arcs ni localement connexe.

Proposition 3.3. : *Un <u>ouvert</u> de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs SSI il est connexe.*

Dans tout le chapitre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Normes. Topologie d'un espace vectoriel normé.

1.1. Normes

DÉFINITION : Soit E un espace vectoriel sur K. Une norme sur E est une application $\nu : E \to \mathbb{R}_+$ telle que

(N_1) $\nu(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$
(N_2) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$, $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$ (*homogénéité*)
(N_3) $\forall x \in E, \forall y \in E$, $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ (*sous-additivité*)

Un espace vectoriel normé (plus précisément un K-espace vectoriel normé (en abrégé e.v.n., plus précisément K-e.v.n.)) est un couple (E, ν) où E est un K-e.v. et ν une norme sur E.
On note en général une norme par $||.||$; si $x \in E$ e.v.n., $||x||$ s'appelle la norme de x.

EXEMPLES : - la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, le module une norme sur $\mathbb{C}$,
- et plus généralement, rappelons les normes usuelles sur K^n , $n \in \mathbb{N}^*$; soit $x = (x_1, ..., x_n) \in K^n$:
norme euclidienne : $||x||_{\text{eucl}} = \big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\big)^{1/2}$; norme sup : $||x||_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$; $\nu_+(x) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$
- l'application $f \in E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}) \mapsto ||f||_\infty := \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ définit une norme sur E, appelée norme de la convergence uniforme. Plus généralement, si X est un ensemble non vide et F un espace vectoriel normé, $||f||_\infty := \sup_{t \in X} ||f(t)||$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{B}(X, F)$ des fonctions bornées de X dans F.

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES : Si E est un K-e.v. et $||.||$ une norme sur E :

(i) $||0_E|| = 0$
(ii) $\big|||x|| - ||y||\big| \leq ||x - y||$, $\forall x, y \in E$
(iii) Si $E \neq \{0_E\}$, l'application norme est non bornée sur E.

1.2. Distance associée à une norme. Topologie d'un e.v.n.

Définition-Proposition 1.1 : *Soit $(E, ||.||)$ un e.v.n..*
L'application $d : (x,y) \in E \times E \mapsto d(x,y) := ||x - y||$ est une distance sur E, invariante par translation (i.e. $\forall x, y, z \in E$, $d(x+z, y+z) = d(x,y)$), appelée distance associée à la norme $||.||$.

En pratique, on suppose toujours qu'un e.v.n. est muni de la distance associée à la norme, et de la topologie définie par cette distance.

DÉFINITION : deux normes sur un e.v. E sont *équivalentes* si elles définissent la même topologie sur E.
Ex. : les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

On verra plus loin (§ 2.1) une caractérisation de l'équivalence de normes sur un e.v.n.

DÉFINITION : On appelle *espace de Banach* un e.v.n. complet (pour la distance associée à la norme).

Exemples : Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$, l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme sont des espaces de Banach.

La topologie d'un e.v.n. est compatible avec les opérations algébriques définies sur E :

Proposition 1.2 : *Soit $(E, ||.||)$ un e.v.n., d la distance associée à la norme ; K est muni de sa topologie euclidienne.*
l'application $x \mapsto ||x||$ est uniformément continue sur (E, d)
l'application $(x,y) \mapsto x + y$ est uniformément continue sur l'espace métrique produit $(E,d) \times (E,d)$
l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue sur $K \times E$.

CONSÉQUENCES de la continuité de l'addition et de l'application $(\lambda, x) \in K \times E \mapsto \lambda x$:
(1) les tranlations $\tau_a : x \mapsto x + a$, où a fixé dans E, et les homothéties non nulles $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$, où λ non nul, fixé dans K, sont des homéomorphismes de E sur E.
(2) l'adhérence d'un sous-espace vectoriel d'un e.v.n. est encore un sous-espace vectoriel.

REMARQUE : en général, l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ n'est pas uniformément continue : il suffit de considérer le cas où $E = K$.

Boules ouvertes et fermées dans un e.v.n. :

Proposition 1.3. : *Dans un e.v.n. l'adhérence d'une boule ouverte de rayon non nul est la boule fermée de même centre et même rayon ; l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et même rayon ; la frontière d'une boule non vide est la sphère de même centre et même rayon.*

1.3. Parties convexes

On rappelle qu'une partie A d'un espace vectoriel E est *convexe* si $\forall x, y \in A$, $\forall t \in [0,1]$: $tx+(1-t)y \in A$.

EXEMPLES :- un sous-espace vectoriel d'un e.v. E est une partie convexe de E
- Si E est un e.v.n. toute boule de E est convexe.

Proposition 1.4. : *Soit E un e.v.n. l'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe de E sont des parties convexes de E.*

1.4. Sous-espaces et produits d'e.v.n.

Définition-proposition 1.5. : *Soit (E,ν) un e.v.n. et F un sous-espace vectoriel de E. La restriction à F de ν est une norme sur F ; l'e.v.n. $(F, \nu|_F)$ est simplement appelé sous-espace de l'e.v.n. E.*

Proposition 1.6. : *Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach. Si F est un sous-espace de Banach d'un e.v.n. E, le sous-espace F est fermé dans E.*

Proposition 1.7. : *Soit $(E_j, ||.||_j)$, $j = 1, .., n$, des K-e.v.n. et $E = \prod_1^n E_j$.*
Les applications $\nu_\infty : x = (x_1, ..., x_n) \in E \mapsto \max_{1\le j\le n} ||x_j||_j$, $\nu : x \mapsto \big(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\big)^{1/2}$ et $\nu_+ : x \mapsto \sum_{j=1}^n |x_j|$ définissent sur E des normes équivalentes ; la topologie associée est la topologie produit sur E.

Proposition 1.8. : *Un produit fini d'e.v.n. muni de l'une des distances usuelles est un espace de Banach SSI chaque facteur est un espace de Banach.*

2. Applications linéaires continues, multilinéaires continues.

2.1. Continuité d'une application linéaire entre e.v.n.

Proposition 2.1. : *Soit E et F deux e.v.n. sur le même corps K et u une application linéaire dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *u est continue sur E*
(2) *u est continue en 0_E*
(3) *Il existe une constante $M \ge 0$, telle que $||u(x) \le M\, ||x||$, $\forall x \in E$*

Corollaire 2.2. : *Deux normes ν_1 et ν_2 sur un e.v.n. $E \neq \{0_E\}$ sont équivalentes SSI il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\forall x \in E$: $\alpha\, \nu_1(x) \le \nu_2(x) \le \beta\, \nu_1(x)$.*

Ces deux normes définissent alors sur E la même topologie, la même structure uniforme, de plus les parties bornées pour l'une le seront pour l'autre.

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES ET LEURS NOYAUX.

Le noyau d'une application linéaire continue d'un K- e.v.n. E dans un K-e.v.n. F est un fermé de E.
La réciproque est en général fausse, comme le montre l'exemple suivant :
$E = F = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup ($|f||_\infty = sup\{|f(t)|\ ,\ t \in [0,1]\}$), $u : f \in E \mapsto f'$ n'est pas continue, pourtant son noyau, le s.e.v. formé des applications constantes, est fermé dans $(E, ||.||_\infty)$.

Toutefois, pour les formes linéaires, on a le résultat suivant :

Proposition 2.3. : *Une forme linéaire f sur un K-e.v.n. E est continue si et seulement si son noyau $Ker\, f$ est fermé dans E.*
En particulier, tout hyperplan fermé d'un e.v.n.E est le noyau d'une forme linéaire continue non nulle sur E.

RAPPEL : Soit E un espace vectoriel ; un *hyperplan* H de E est un s.e.v. de codimension 1 (i.e. dim $E/H = 1$) ou encore un s.e.v. dont tout supplémentaire dans E est de dimension 1.
H est un hyperplan de E ssi il existe une forme linéaire non nulle sur E telle que H=ker f.

2.2 Espaces d'applications linéaires continues

Soit E et F des e.v.n. sur K.
$\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. On notera $\mathcal{L}(E)$ pour $\mathcal{L}(E,E)$.
le dual topologique de E est l'espace $E' := \mathcal{L}(E,K)$.

Proposition 2.4 : *Soit E,F des e.v.n. sur K.*
L'application $|||.|||$: $u \in \mathcal{L}(E,F) \mapsto |||u||| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|$ *est une norme sur* $\mathcal{L}(E,F)$*, appelée parfois norme subordonnée (à celles de E et F).*
autres expressions de $|||u|||$:
$|||u|||$ *est la plus petite des constantes M telles que* $\|u(x)\| \leq M\|x\|$ $,\forall x \in E$ *;*
$|||u||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

Théorème 2.5 : *Si E est un e.v.n. sur K et F un espace de Banach sur K, alors* $\mathcal{L}(E,F)$ *muni de sa norme usuelle est un espace de Banach.*
En particulier le dual topologique d'un espace de Banach est un espace de Banach.

2.3 Applications multilinéaires et continuité

proposition 2.6 : *Soient* E_j, $j = 1, ..., n$ *et F des K-e.v.n. et une application multilinéaire* $f : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$.
Les propriétés suivantes (i), (ii) et (iii) sont équivalentes :

(i) *f est continue*
(ii) *f est continue en 0*
(iii) $\exists M \geq 0$, $\forall (x_1, ..., x_n) \in \prod_{j=1}^{n} E_j$ $||f(x_1, .., x_n)|| \leq M||x_1||...||x_n||$

On note $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires sur $E_1 \times ... \times E_n$ à valeurs dans F.

Proposition 2.7 : *Soit* $E_1, ...E_n$, F *des K-e.v.n.*
(a) *On définit une norme sur* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *en posant* $\|f\| = \sup\limits_{\max \|x_j\|\leq 1} \|f(x_1, ..., x_n)\|$.
$\|f\|$ *est la plus petite des constantes M telles que* $\|f(x_1, ..., x_n)\| \leq M\|x_1\|...\|x_n\|$ *pour tous* $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n$.
(b) *Si F est un espace de Banach, l'espace* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *muni de la norme définie en (a) est un espace de Banach.*

3. Espaces vectoriels normés de dimension finie.

3.1. Normes sur un e.v.n de dimension finie

Théorème 3.1. : *Soit E un K-e.v.n. de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$*. Alors :*
E est un espace de Banach isomorphe à K^n*. (i.e. il existe une bijection linéaire bi-continue de K sur E)*
Toutes les normes définies sur E sont équivalentes entre elles.

La preuve repose sur l'assertion suivante :
lemme 3.2. : $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\{e_1, ..., e_n\}$ *est la base canonique de* K^n *; soit* N_1 *une norme sur* K^n*. Alors il existe* $\beta > 0$ *tel que pour tout* $(x_1, ..., x_n) \in K^n$:

$$\max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq \beta \, . \, N_1(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) \, .$$

3.2. Applications.

Corollaire 3.3. : *Tout s.e.v. E de dimension finie d'un e.v.n. G est fermé dans G.*

Corollaire 3.4. : *Soit* $\underline{E, E_1, .., E_p}$ *des e.v.n. dont les* *<u>dimensions</u> sont <u>finies</u> et F un e.v.n.*
Toute application linéaire de E dans F est continue.
Toute application multilinéaire de $E_1 \times ... \times E_p$ *dans F est continue.*

Corollaire 3.5. : *Soit E un <u>e.v.n. de dimension finie</u> et A une partie de E.*
A est précompacte SSI elle est bornée.
A est compacte SSI elle est fermée et bornée.

3.3. Caractérisation des e.v.n. de dimension finie

Théorème 3.6. : (Théorème de Riesz) *Soit E un e.v.n. ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) E est de dimension finie
(2) E est localement compact
(3) la boule unité fermée $\overline{B(0_E, 1)}$ *de E est compacte.*

corollaire 3.7. : *Dans un e.v.n de dimension infinie, tout compact est d'intérieur vide.*

4. Séries dans les e.v.n.

4.1. Généralités

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace normé E : $s_n = x_0 + ... + x_n$ est appelée somme partielle de rang n de $(x_n)_n$; on appelle série de terme général x_n le couple $((x_n)_n, (s_n)_n)$.
On dit que la *série de terme général x_n est convergente* si la suite $(s_n)_n$ converge ; la limite de $(s_n)_n$ est notée $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et appelée somme de la série de terme général x_n.

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES :

- Condition nécessaire de convergence : si la série de terme général x_n converge, alors $x_n \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

- Si les séries de termes généraux x_n et y_n convergent, alors, pour tout scalaire $\lambda \in K$, la série de terme général $x_n + \lambda y_n$ converge et sa somme est égale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

- Soit E et F des e.v.n. ; si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si la série de terme général x_n converge dans E, alors la série de terme général $u(x_n)$ converge dans F et $\sum_{n=0}^{\infty} u(x_n) = u\big(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\big)$.

On déduit du critère de Cauchy sur les suites :

proposition 4.1.(critère de Cauchy)*Dans un espace de Banach, une série $\sum x_n$ converge si et seulement si*
$\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\sup\limits_{p\geq 0} || \sum_{k=n}^{n+p} x_n||\big) = 0.$

Remarque : dans tout espace normé une série convergente satisfait le critère de Cauchy ; dans la proposition 4.1, la complétude n'est requise en fait que pour la condition suffisante.

4.2. Séries absolument convergentes

Définition : une série de terme général x_n dans un e.v.n. E est *absolument convergente* si la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} ||x_n||$ converge.

Terminologie : soit X ensemble non vide et F un espace vectoriel normé ; une série de terme général u_n de l'espace normé $\mathcal{B}(X, F)$ des fonctions bornées de X dans F est absolument convergente si la série de terme général $\sup\limits_{t\in X} ||u_n(t)||$ converge, soit si $\sum u_n$ est normalement convergente sur X.

Proposition 4.2. *Dans un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente.*

Proposition 4.3. (commutative convergence) *Dans un espace de Banach, une série absolument convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est commutativement convergente i.e. pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série de terme général $a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente ; de plus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.*

4.3. L'algèbre normée $\mathcal{L}(E)$, où E e.v.n.

PRÉLIMINAIRES.
Composée d'applications linéaires continues :
Proposition 4.3. : *Soit E, F, G des K-e.v.n ; si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ et l'on a : $|||v \circ u||| \leq |||v|||\,|||u|||$.*
L'application $(u, v) \mapsto v \circ u$ est bilinéaire continue sur $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$.

On en déduit que $\mathcal{L}(E, +, ., \circ)$ est une algèbre normée
(une algèbre $(A, +, ., \times)$ est une algèbre normée si A est muni d'une norme faisant de l'e.v. A un e.v.n et si de plus pour tous $a, b \in A$, $||a \times b|| \leq ||a||\,||b||$).

DÉFINITION : Un élément u de $\mathcal{L}(E, F)$ est *inversible* dans $\mathcal{L}(E, F)$ s'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = I_E$ et $u \circ v = I_F$. On note $\mathcal{H}(E, F)$ (ou $Isom(E)$ si $E = F$) l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E, F)$ (resp. de $\mathcal{L}(E)$).

Théorème 4.4 : *Soit E un <u>Banach</u>. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $|||u||| < 1$, alors la série de terme général u^n est absolument convergente, $I_E - u$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et $(I_E - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$*

Corollaire 4.5. : *Si <u>E</u> est un espace de <u>Banach</u> sur K et F un K-e.v.n. l'ensemble $\mathcal{H}(E, F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$ (et $Isom(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$).*