Chapitre 1. Révision de théorie des ensembles

Exercice 1. Montrer que

a) si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont deux familles d'ensembles, $(\cup_{i\in I}A_i)\cap(\cup_{j\in J}B_j) = \cup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cap B_j)$ et $(\cap_{i\in I}A_i)\cup(\cap_{j\in J}B_j) = \cap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cup B_j)$,

b) si $((A_j)_{j\in J_i})_{i\in I}$ est une famille de familles d'ensembles, $\cup_{i\in I}(\cup_{j\in J_i}A_j) = \cup_{j\in\cup_{i\in I}J_i}A_j$ et $\cap_{i\in I}(\cap_{j\in J_i}A_j) = \cap_{j\in\cup_{i\in I}J_i}A_j$,

c) si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ sont deux familles d'ensembles, $(\prod_{i\in I}A_i)\cap(\prod_{i\in I}B_i) = \prod_{i\in I}(A_i\cap B_i)$.

Exercice 2. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application quelconque. On rappelle que pour toute partie A de X, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ et pour toute partie B de Y, $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$.

a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \subset f^{-1}(f(A))$, puis l'équivalence :

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(X), f^{-1}(f(A)) = A.$$

Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

b) Montrer que $\forall B \in \mathcal{P}(Y), f(f^{-1}(B)) \subset B$, puis l'équivalence :

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(Y), f(f^{-1}(B)) = B.$$

Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

c) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X.
Montrer que $f(\cup_{i\in I}A_i) = \cup_{i\in I}f(A_i)$, que $f(\cap_{i\in I}A_i) \subset \cap_{i\in I}f(A_i)$ et que si f est injective on a l'égalité. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

d) Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Y. Montrer que $f^{-1}(\cup_{i\in I}B_i) = \cup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ et $f^{-1}(\cap_{i\in I}B_i) = \cap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$.

e) Si $A \in \mathcal{P}(X)$ et $B \in \mathcal{P}(Y)$, comparer $f^{-1}(B^c)$ et $(f^{-1}(B))^c$, puis $f(A^c)$ et $(f(A))^c$.

Exercice 3. Montrer que si A, B sont dénombrables alors $A \times B$ aussi.

Exercice 4. Montrer que la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 5. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. (Rappel : un nombre complexe z est dit algébrique s'il existe un polynôme non nul à coefficients rationnels qui s'annule en z).

Exercice 6. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ n'est pas dénombrable. (Rappel : Y^X désigne l'ensemble des applications de X dans Y, en particulier $Y^{\mathbf{N}}$ est l'ensemble des suites à valeurs dans Y).

Exercice 7. Soient I un ensemble quelconque et x une application de I dans $\mathbf{R}^+$. Pour toute partie finie F de I on note $S_F := \sum_{i\in F} x(i)$, et on note S le sup des S_F (quand F parcourt l'ensemble des parties finies de I). Démontrer que si $S \neq +\infty$ alors l'ensemble $D := \{i \in I, x(i) \neq 0\}$ est au plus dénombrable. (Poser $D_n = \{i \in I, x(i) \geq 1/n\}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$). En déduire que toute famille d'intervalles de $\mathbf{R}$ ouverts non vides disjoints est au plus dénombrable.

Chapitre 2. Définition d'une topologie

2.1 Définition

Exercice 8. Déterminer toutes les topologies sur un ensemble à 3 éléments (il y en a 29).

Exercice 9. L'ensemble $\{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,-4\}, \{1,2,3,-4\}, \mathbf{Z}\}$ est-il (l'ensemble des ouverts d')une topologie sur $\mathbf{Z}$?

Exercice 10. Quelles conditions doivent vérifier A et B pour que $\{\emptyset, A, B, E\}$ soit (l'ensemble des ouverts d')une topologie sur E ?

Exercice 11. Soit $X = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 2\}$. On définit pour $n \in \mathbf{N}$, $D_n = \{p \in X \mid p|n\}$. L'ensemble $\{D_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ est-il une topologie sur X ?

Exercice 12. Soit $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup$ l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$ dont le complémentaire est au plus dénombrable.

a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que *pour cette topologie* toute intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert (une "intersection dénombrable d'ouverts" est un ensemble – non nécessairement dénombrable – de la forme $\cap_{n\in\mathbf{N}} O_n$ où tous les O_n sont des ouverts).

c) Montrer que *pour cette topologie* l'intersection de deux ouverts non vides est non vide.

d) Montrer que ces deux propriétés sont fausses pour la topologie usuelle sur $\mathbf{R}$.

Exercice 13. Dans $\mathbf{R}^2$, notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des disques ouverts dont le centre appartient à $\mathbf{Z}^2$ et dont le rayon appartient à $\mathbf{N}$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des réunions d'éléments de $\mathcal{B}$. $\mathcal{T}$ est-elle une topologie sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 14. Soient X un ensemble, $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des réunions d'éléments de $\mathcal{B}$ (en particulier, par convention, $\emptyset \in \mathcal{C}$).

a) Pour toute topologie $\mathcal{T}$ sur X, démontrer que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}$ (c'est-à-dire par définition : $\mathcal{T} = \mathcal{C}$) si et seulement si $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ et $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$.

b) Démontrer que $\mathcal{B}$ est base d'ouverts d'une topologie sur X (autrement dit : que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X) si et seulement si $\cup_{O\in\mathcal{B}} O = X$ et $\forall O, O' \in \mathcal{B}, O \cap O' \in \mathcal{C}$.

Exercice 15. Soient X un ensemble, $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des réunions d'éléments de X. Démontrer que $\mathcal{C}$ est exactement l'ensemble des parties U de X qui vérifient $\forall x \in U, \exists O \in \mathcal{B}, x \in O \subset U$.

Exercice 16. (Topologie engendrée). Soient E un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{F}$ (avec la convention $\cap_{i\in\emptyset} A_i = E$) et $\mathcal{T}$ l'ensemble des réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{G}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E, et que c'est la moins fine contenant $\mathcal{F}$.

Exercice 17. Dans $\mathbf{R}^2$ muni de sa topologie usuelle, les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés ? $A = \{(1/n, y) \mid n \in \mathbf{N}^*, y \in [0,1]\}$, $B = \{(x, \arctan x) \mid x \in \mathbf{R}\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2/3 + y^2/5 < 2 \text{ et } y < 3 - x^4\}$.

2.2 Intérieur, adhérence, frontière

Exercice 18. Soient X un ensemble, A une partie de X, $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, X\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X et déterminer, pour toute partie B de X, les ensembles $\overset{\circ}{B}, \overline{B}, \mathrm{Fr}(B)$.

Exercice 19. Soient $a, b, c, d, r \in \mathbf{R}$. Dans $\mathbf{R}^2$ muni de sa topologie usuelle,

a) montrer que le pavé $]a,b[\times]c,d[$ est ouvert,

b) montrer que la boule $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-b)^2\le r^2\}$ est fermée,

c) montrer que la bande $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid a<x<b\}$ est ouverte. Donner son adhérence et sa frontière.

Exercice 20. Soit $\mathcal{T}=\{]-x,x[\mid x\in[0,+\infty]\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbf{R}$. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'un singleton $\{a\}$ puis d'un segment $[a,b]$.

Exercice 21. Soit A une partie d'un espace topologique.

a) Montrer que si A est ouvert, l'intérieur de $\mathrm{Fr}(A)$ est vide ; ce résultat reste-t-il vrai avec A fermé ? avec A quelconque ?

b) Montrer que A est ouvert si et seulement si $A\cap\mathrm{Fr}(A)=\emptyset$.

c) Montrer que A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)\subset A$.

d) Montrer que A est à la fois ouvert et fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)=\emptyset$.

e) Montrer que $\mathrm{Fr}\left(\overline{A}\right)\subset\mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{Fr}\left(\overset{\circ}{A}\right)\subset\mathrm{Fr}(A)$. Donner un exemple dans $\mathbf{R}$ où ces trois ensembles sont distincts.

Exercice 22. Soient A et B deux parties d'un espace topologique.

a) Montrer que $\mathrm{Fr}(A\cup B)\subset\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)$.

b) Donner un exemple dans $\mathbf{R}$ où cette inclusion est stricte.

c) Montrer que $\overline{A}\cap\overline{B}=\emptyset\Rightarrow\mathrm{Fr}(A\cup B)=\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)$.

Exercice 23. Pour toute partie A d'un espace topologique on définit $\alpha(A)=\overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A)=\overline{\overset{\circ}{A}}$.

a) Montrer que α,β sont croissantes (pour l'inclusion), c'est-à-dire
$A\subset B\Rightarrow\alpha(A)\subset\alpha(B),\beta(A)\subset\beta(B)$.

b) Montrer que $\overset{\circ}{A}\subset\alpha(A)\subset\overline{A}$ et $\overset{\circ}{A}\subset\beta(A)\subset\overline{A}$

c) Montrer que $\alpha\circ\alpha=\alpha$ et $\beta\circ\beta=\beta$.

d) Montrer que si A et B sont deux ouverts disjoints, $\alpha(A)$ et $\alpha(B)$ aussi.

e) Montrer par des exemples qu'il n'existe pas d'inclusion entre $\alpha(A)$ et $\beta(A)$.

f) Soit $A=]0,1[\cup]1,2[\cup\{3\}\cup(\mathbf{Q}\cap]4,5[)$. Calculer (dans $\mathbf{R}$ muni de sa topologie usuelle) $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$, $\alpha\left(\overset{\circ}{A}\right)$, $\beta\left(\overline{A}\right)$ (vérifier qu'ils sont tous distincts).

Exercice 24. Montrer qu'une partie A d'un espace topologique X est d'intérieur non vide si et seulement si A rencontre toutes les parties denses de X.

Exercice 25. Soient E un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

a) Montrer que $\cup_{i\in I}\overline{A_i}\subset\overline{\cup_{i\in I}A_i}$ et qu'il y a égalité lorsque I est fini.

b) Calculer ces ensembles quand $E=\mathbf{R}^2$, $I=\mathbf{N}^*$ et $A_i=\{(1/i,1/j)\mid j\in\mathbf{N}^*\}$.

c) Montrer que $\overline{\cap_{i\in I}A_i}\subset\cap_{i\in I}\overline{A_i}$ et donner un exemple simple dans $\mathbf{R}$ où cette inclusion est stricte.

d) Ecrire les résultats correspondants pour les intérieurs.

Exercice 26. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. Notons $\alpha=\inf(G\cap\mathbf{R}_+^*)$.

a) Montrer que si $\alpha > 0$ alors $G = \alpha\mathbf{Z}$.

b) Montrer que si $\alpha = 0$ alors G est dense dans $\mathbf{R}$.

c) Décrire les classes d'isomorphisme des sous-groupes fermés de $\mathbf{R}$.

d) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que le sous-groupe $G = \mathbf{Z} + \lambda\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$ ssi $\lambda \notin \mathbf{Q}$.

Exercice 27.

a) Quels sont les sous-groupes multiplicatifs de $\mathbf{R}_+^*$? (Indication : regarder l'image par ln et utiliser l'exercice précédent) En déduire les sous-groupes multiplicatifs de $\mathbf{R}^*$.

b) Montrer qu'un sous-groupe multiplicatif de $U := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ est soit cyclique d'ordre fini, soit dense dans U. (Indication : utiliser l'application $x \mapsto \exp(ix)$).

c) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbf{N}}$ est $[-1, 1]$.

Exercice 28. (Axiomes de Kuratowski) Soient X un ensemble et $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes : (1) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$, (2) $\varphi(A\cup B) = \varphi(A)\cup\varphi(B), \forall A, B \subset X$, (3) $A \subset \varphi(A), \forall A \subset X$, (4) $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Montrer qu'il existe une unique topologie sur X telle que $\forall A \in \mathcal{P}(A), \overline{A} = \varphi(A)$.

Exercice 29. Soient I un ensemble non dénombrable et $E = \mathbf{R}^I$ (l'espace vectoriel des applications de I dans $\mathbf{R}$), muni de la topologie produit notée $\mathcal{T}$. Pour $f \in E$, pour toute partie finie A de I et tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$V(f; A, \varepsilon) := \{g \in E | \forall x \in A, |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

a) Montrer que ces ensembles forment une base de voisinages de f pour $\mathcal{T}$.

b) Montrer que $f_n \to f$ dans $(E, \mathcal{T})$ si et seulement si $\forall x \in I, f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbf{R}$ (c'est pourquoi $\mathcal{T}$ est appelée topologie de la convergence simple).

c) Soit S l'ensemble des $f \in E$ telles que $\{x \in I | f(x) \neq 0\}$ soit fini. Montrer que S est dense dans E.

d) Soit $f \in E$ telle que $\{x \in I | f(x) \neq 0\}$ soit non dénombrable (exemple ?). Montrer que f ne peut pas être limite d'une suite d'éléments de S.

e) En déduire que l'ensemble des voisinages de f (pour $\mathcal{T}$) n'est pas à base dénombrable.

2.3 Voisinage, point isolé, point d'accumulation

Pour toute partie A d'un espace topologique, on notera $\mathrm{Is}(A)$ l'ensemble des points isolés de A et A' l'ensemble des points d'accumulation de A.

Exercice 30. Soient $a \in X$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Vérifier que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X et déterminer

a) l'ensemble des voisinages d'un élément x de X,

b) $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$, $\mathrm{Is}(A)$ et A' pour toute partie A de X.

Exercice 31. Pour chacune des parties de $\mathbf{R}$ ci-dessous, déterminer $\overline{A_i}$, $\mathring{A}_i$, $\mathrm{Fr}(A_i)$, $\mathrm{Is}(A_i)$ et A_i' : $A_1 =]-\infty, 1[\cup]1, 2] \cup \{3, 14\}$, $A_2 = \mathbf{Z}$, $A_3 = \{(-1)^p + 1/2^p \mid p \in \mathbf{Z}\}$, $A_4 = \mathbf{Q}$.

Exercice 32. Même question dans $\mathbf{R}^2$ avec $A = (]-\infty, -1] \times \{0\} \cup [-1, 1[\times[-1, 1[) \cap (\mathbf{R}^* \times \mathbf{R})$.

Exercice 33. Soit x un point d'accumulation d'une partie A de $\mathbf{R}$ (muni de sa topologie usuelle). Montrer que tout intervalle ouvert contenant x contient une infinité de points de A.

Exercice 34. Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un espace topologique E est dite localement finie si $\forall x \in E$, il existe un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de A_i. Montrer que la réunion d'une famille localement finie de fermés est fermée.

Exercice 35. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B, A_i \in \mathcal{P}(X)$. Montrer que

a) $\overline{A} = A \cup A'$ et que $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$,

b) $\cup_{i\in I}(A'_i) \subset (\cup_{i\in I} A_i)'$,

c) si tous les singletons de X sont fermés alors A' est fermé et $(A')' \subset A'$.

2.4 Séparé, séparable

Exercice 36. Soient X un ensemble infini et $\mathcal{T} = \{\emptyset\}\cup$ l'ensemble des parties de X cofinies, c'est-à-dire de complémentaire fini.

a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie. Est-elle séparée ?

b) Montrer que pour tous points x, y distincts dans X, il existe un voisinage de x ne contenant pas y.

Exercice 37. Soient X un espace topologique et $x \in X$.

a) Prouver l'équivalence des trois propriétés suivantes (un espace séparé vérifiant ces propriétés est dit régulier).

   i) Pour tout fermé F de X ne contenant pas x, il existe un voisinage V de x et un ouvert Ω contenant F tels que $V \cap \Omega = \emptyset$

   ii) x admet un système fondamental de voisinages fermés

   iii) Pour tout voisinage W de x, il existe un ouvert U contenant x tel que $\overline{U} \subset W$.

b) Démontrer que tout sous-espace d'un régulier est régulier.

c) Dans un espace régulier X, soit F un fermé tel que le seul ouvert contenant F soit X. Démontrer que $F = X$.

Exercice 38. Un espace topologique X est dit complètement régulier lorsqu'il est séparé et que pour tout fermé F de X et tout point $a \in F^c$, il existe $f : X \to [0, 1]$ continue telle que $f(F) \subset \{0\}$ et $f(a) = 1$. Montrer que

a) tout espace complètement régulier est régulier (cf exercice précédent),

b) tout sous-espace d'un complètement régulier est complètement régulier,

c) si X, Y sont complètement réguliers alors $X \times Y$ aussi.

Exercice 39. Un espace topologique X est dit normal lorsqu'il est séparé et que pour tous fermés disjoints F, G de X, il existe $f : X \to [0, 1]$ continue telle que $f(F) \subset \{0\}$ et $f(G) \subset \{1\}$.

a) Vérifier que tout espace normal est complètement régulier (voir exercice précédent).

b) Soit X un espace séparé. Démontrer que si X est normal alors pour tous fermés disjoints F, G de X, il existe U, V ouverts disjoints tels que $F \subset U$ et $G \subset V$. (La réciproque – beaucoup plus difficile – est vraie : c'est le théorème d'Urysohn).

Exercice 40. Sur $\mathbf{R}$, on définit la topologie usuelle $\mathcal{T}$ par :
$O \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in O, \exists a, b \in \mathbf{R}, x \in]a, b[\subset O$. Montrer que

a) $\mathcal{T}$ est bien une topologie sur $\mathbf{R}$ et qu'elle est séparée,

b) $\mathcal{T}$ admet une base dénombrable d'ouverts,

c) tout ouvert non vide est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts non vides disjoints, et ce de façon unique.

Exercice 41. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique à base dénombrable. Montrer que

a) de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable,

b) $(E, \mathcal{T})$ est séparable, c'est-à-dire qu'il existe dans E une partie dénombrable dense.

Exercice 42. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique à base dénombrable et P l'ensemble des points de E dont aucun voisinage n'est (au plus) dénombrable.

a) Montrer que P^c est ouvert et au plus dénombrable.

b) En déduire que P est fermé et sans point isolé.

Chapitre 3. Continuité

3.1 Définition

Exercice 43. Soient $f : E \to F$ continue et $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. En déduire que si A est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

Exercice 44. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ continues. Montrer que si $g \circ f$ est un homéomorphisme et si f est surjective alors f et g sont des homéomorphismes.

Exercice 45. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On note χ_A la fonction caractéristique d'une partie A de X.

a) Montrer que χ_A est continue en x si et seulement si $x \notin \mathrm{Fr}(A)$.

b) A quelle condition χ_A est-elle continue sur X ?

c) A quelle condition a-t-on " $\forall A \in \mathcal{P}(X), \chi_A$ est continue sur X " ?

Exercice 46. Soient E un ensemble non dénombrable et $a \notin E$. On pose $X = E \cup \{a\}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E) \cup \{X \setminus D \mid D \text{ est une partie au plus dénombrable de } E\}$.

a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X et que *pour cette topologie* toute intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert.

b) Montrer que $\mathcal{T}$ est séparée.

c) Montrer que $\mathcal{T}$ a les mêmes suites convergentes que la topologie discrète (mais que ces deux topologies sont différentes).

d) Soit $f : X \to \mathbf{R}$ continue. Montrer qu'il existe un voisinage de a sur lequel f est constante. En déduire que $f(X)$ est au plus dénombrable.

Exercice 47. Soient $(E, \mathcal{T}_E)$ et $(F, \mathcal{T}_F)$ deux espaces topologiques, $f : E \to F$ et $a \in E$.

a) Montrer que si f est continue en a alors f est séquentiellement continue en a (i.e. $\forall x \in E^{\mathbf{N}}, \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$).

b) Montrer si a admet une base dénombrable de voisinages, la réciproque est vraie.

c) Etudier le cas $E = F = \mathbf{R}$, $\mathcal{T}_E = \{\emptyset\}\cup$ l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$ de complémentaire au plus dénombrable, $\mathcal{T}_F =$ la topologie usuelle sur $\mathbf{R}$ et $f = id_{\mathbf{R}}$. Conclure.

Exercice 48. Soient X un espace topologique, $a \in X$, $f : X \to X$ continue, $y_n = f^n(a)$, et A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite y. Montrer que $f(A) \subset A$ et qu'il y a égalité si f est un homéomorphisme.

Exercice 49.

a) Montrer que toute droite de $\mathbf{R}^2$ et tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ sont homéomorphes.

b) Montrer que $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, xy = 1\}$ et $P = \{0, 1\} \times \mathbf{R}$ sont homéomorphes à $\mathbf{R}^*$.

Exercice 50. Un espace topologique X est dit NON-connexe lorsqu'il existe une surjection continue de X dans $\{0, 1\}$ (et connexe lorsqu'il n'en existe pas).

Les sous-espaces connexes de $\mathbf{R}$ *sont donc les intervalles.*

Soient $A =]-1, 1[$, $B = [-1, 1]$, $C =$ le cercle unité de $\mathbf{R}^2$.

a) Démontrer que $\forall a \in A$, $A \setminus \{a\}$ est non-connexe.

b) Quels sont les $b \in B$ tels que $B \setminus \{b\}$ soit connexe ?

c) Démontrer que $\forall c \in C$, $C \setminus \{c\}$ est connexe. (On pourra montrer qu'il est homéomorphe à $]0, 2\pi[$).

d) En déduire que les trois espaces A, B, C sont deux à deux non-homéomorphes.

e) En déduire que C n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbf{R}$.

3.2 Topologie induite, topologie produit.

Exercice 51. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $A \subset X$ et $\mathcal{T}_A$ la topologie induite sur A.

a) Montrer que si $B \subset A$, l'adhérence de B pour $\mathcal{T}_A$ est $\overline{B} \cap A$.

b) En déduire (en posant $A = B \cup C$) que $\overline{B} \cap C = \emptyset \Leftrightarrow B$ est disjoint de C et fermé dans $B \cup C$.

c) Montrer que si $B \subset A$, l'intérieur de B pour $\mathcal{T}_A$ contient $\overset{\circ}{B} \cap A$. Donner un exemple où ces deux ensembles sont distincts.

Exercice 52. Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $(F_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie de fermés recouvrant X.

a) Montrer que f est continue si et seulement si toutes les restrictions $f_{|F_k}$ le sont.

b) Donner deux contre-exemples pour justifier les hypothèses.

c) Soient $\varphi, \psi : [0, 1] \to Y$ deux applications continues telles que $\varphi(1) = \psi(0)$. On définit $f : [0, 1] \to Y$ par $f(t) = \varphi(2t)$ si $t < 1/2$, $f(t) = \psi(2t - 1)$ sinon. Démontrer que f est continue.

Exercice 53. Soient X, Y deux espaces topologiques et A une partie de Y, munie de la topologie induite. On note i l'injection canonique de A dans Y. Montrer qu'une application $f : X \to A$ est continue si et seulement si $i \circ f$ est continue.

Exercice 54. Soit X un espace topologique séparable. Montrer que tout ouvert de X, muni de la topologie induite, est séparable.

Exercice 55. Soit $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$ (dans $\mathbf{R}^2$ muni de la topologie usuelle).

a) Déterminer $\overset{\circ}{C}$ et $\overline{C}$. C est-il ouvert ? fermé ?

b) Mêmes questions pour $D = C \times \{0\}$, dans $\mathbf{R}^3$ muni de la topologie usuelle.

Exercice 56. Soient X, Y deux espaces topologiques. Montrer que si X et Y sont à base dénombrable d'ouverts alors le produit $X \times Y$ aussi.

Exercice 57. Soient X, Y deux espaces topologiques, on munit $X \times Y$ de la topologie produit. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(X), \forall B \in \mathcal{P}(Y), \mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B))$.

Exercice 58. Soient $f : X \to Y$ continue, et $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ son graphe ($X \times Y$ est muni de la topologie produit).

a) Montrer que $\Gamma(f)$ (muni de la topologie induite) est homéomorphe à X.

b) Montrer que si Y est séparé alors $\Gamma(f)$ est fermé dans $X \times Y$.

c) Montrer que X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.

Exercice 59. Soient X, Y deux espaces topologiques et $z = (x, y)$ une suite à valeurs dans l'espace topologique produit $X \times Y$.

a) Montrer que si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ et si b est une valeur d'adhérence de y alors (a, b) est une valeur d'adhérence de z.

b) Montrer que ce n'est pas toujours le cas si on remplace l'hypothèse "$\lim_{n\to\infty} x_n = a$" par "$a$ est une valeur d'adhérence de x".

Exercice 60. Soient X, Y deux espaces topologiques et $C(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y. On appelle homotopie de X dans Y toute application continue $h : [0, 1] \times X \to Y$, et on note alors $h_t : X \to X, x \mapsto h(t, x)$. Soient $f, g \in C(X, Y)$, on dit que g est homotope à f et on note $f\mathcal{H}g$ s'il existe une homotopie h de X dans Y telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g$.

a) Montrer que $\mathcal{H}$ est une relation d'équivalence sur $C(X, Y)$.

b) On dit que X est contractile si id_X est homotope à une application constante (de X dans X). Montrer que $\mathbf{R}$ (muni de sa topologie usuelle) est contractile, mais pas $\mathbf{R}^*$.

c) Montrer que si Y est contractile alors $\mathcal{H}$ est triviale.

Exercice 61. Dans $\mathbf{R}^3$, soient S la sphère unité, P le plan d'équation $z = 0$, p le point $(0, 0, 1)$, et $P' = S \setminus \{p\}$. Vérifier que $\forall m \in P'$, $(pm) \cap P$ est réduit à un unique point $\pi(m)$. L'application $\pi : P' \to P$ est appelée projection stéréographique de pôle p. Montrer que π est un homéomorphisme (P', P étant munis de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbf{R}^3$, qui pour P coïncide avec celle de $\mathbf{R}^2$ via la bijection $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$).

3.3 Espaces métriques, continuité uniforme.

Exercice 62. Montrer que tout espace métrique est normal (cf exercice 39).

Exercice 63. Soit (E, d) un espace métrique ; on note $\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y)$ le diamètre d'une partie non vide A de E, et $\delta(\emptyset) = 0$. Pour quelles parties a-t-on $\delta(A) = 0$? Montrer que pour toute partie A de E, $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

Exercice 64. Soient (E, d) un espace métrique et f une injection d'un ensemble X dans E. Montrer que $\delta(x, y) = d(f(x), f(y))$ définit une distance sur X. En déduire que tout espace topologique homéomorphe à un espace métrique est métrisable.

Exercice 65. Soit (E, d) un espace métrique.

a) Montrer que si A est dense dans E, $\{B(a, 1/n) \mid a \in A, n \in \mathbf{N}^*\}$ est une base d'ouverts de la topologie induite par d.

b) En déduire que tout espace topologique métrisable et séparable admet une base dénombrable d'ouverts.

Exercice 66. Montrer qu'un espace topologique métrisable X est séparable si et seulement si X est homéomorphe à un sous-espace de $[0, 1]^{\mathbf{N}}$. Indication : si $\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$ est une partie dense de X et d une distance bornée par 1, on peut définir une application $\varphi : X \to [0, 1]^{\mathbf{N}}$ par $\varphi(x)_n = d(x, a_n)$.

Exercice 67. Un espace topologique X est dit polonais si et seulement si il est de type dénombrable et il existe une distance compatible avec la topologie sur X pour laquelle X est complet.

a) Montrer que tout produit au plus dénombrable de polonais est polonais, et que tout fermé d'un polonais est polonais.

b) En déduire que tout ouvert U d'un polonais X est polonais (introduire $V := \{(x, t) \in X \times \mathbf{R} \mid t.d(x, X \setminus U) = 1\}$ et utiliser l'exercice 58.a).

Exercice 68.

a) Soient X un espace topologique séparé, $f : X \to X^{\mathbf{N}}$ l'application diagonale, $A_n \subset X$, $A = \cap_{n \in N} A_n$. Montrer que f réalise un homéomorphisme entre A et un fermé de $\prod_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

b) En déduire que si X est un espace séparé, l'intersection d'une suite (A_n) de sous-espaces polonais de X est un sous-espace polonais (cf exercice précédent).

c) Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels de $\mathbf{R}$, muni de la topologie induite par celle de la droite numérique, est un espace polonais.

Exercice 69. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues sur leur ensemble de définition respectif ? Montrer qu'elles le sont sur tout segment $[a, b]$ inclus dans cet ensemble. exp, ln, $\sqrt{.}$, $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto x^2$.

Exercice 70. Montrer que si $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ admet des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$ alors f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 71. Soient (E, d) un espace métrique, F un fermé non vide et $U = F^c$.

a) Montrer que $f_F : U \to \mathbf{R}, x \mapsto 1/d(x, F)$ est bien définie et continue.

b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, f_F est uniformément continue sur $U_\alpha = \{x \in X \mid d(x, F) \geq \alpha\}$.

c) Montrer que $U = \cup_{\alpha > 0} U_\alpha$.

d) Donner un exemple où f_F n'est pas uniformément continue sur U.

Exercice 72. Soit (E, d) un espace métrique ; on pose $\delta_1(x, y) = \min(1, d)$ et $\delta_2 = \frac{d}{1+d}$.

a) Montrer que δ_1, δ_2 sont des distances sur E uniformément équivalentes à d.

b) Montrer que $\delta_2 \leq \delta_1 \leq 2\delta_2$ mais que, si (E, d) n'est pas borné, il n'existe aucun réel α tel que $d \leq \alpha\delta_2$.

Chapitre 4. Compacité

4.1 Valeurs d'adhérence

Exercice 73. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, donner un exemple de suite réelle ayant k valeurs d'adhérence. Donner un exemple de suite divergente ayant une seule valeur d'adhérence.

Exercice 74. Dans un espace séparé E, soient x une suite qui converge vers a et $K = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{a\}$ (muni de la topologie induite). Montrer que K est compact.

Exercice 75. Soient A, B deux parties de $\mathbf{R}$, on note $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que

a) A et B compacts $\Rightarrow A + B$ compact,

b) A compact et B fermé $\Rightarrow A + B$ fermé.

c) Donner un exemple où A et B sont fermés mais pas $A + B$.

4.2 Recouvrements ouverts

Exercice 76. On rappelle que dans un espace topologique, un voisinage ouvert d'une partie A est par définition un ouvert U contenant A.

a) Dans un espace séparé E, soient A et B deux parties compactes disjointes. Montrer qu'il existe U voisinage ouvert de A et V voisinage ouvert de B tels que U et V soient disjoints. (Indication : commencer par le cas où B est réduit à un point).

b) En déduire que tout espace compact est normal (cf exercice 39)

c) Déduire de b) que tout espace localement compact est complètement régulier (utiliser les exercices 38.a, 39.a et 78).

Exercice 77. Soit X un espace compact.

a) Montrer que pour tout espace topologique Y, la projection $p_Y : X \times Y \to Y$ est fermée (c'est-à-dire : pour tout fermé F de $X \times Y$, $p_Y(F)$ est un fermé de Y).

b) En déduire que si le graphe d'une application $f : Y \to X$ est fermé alors f est continue.

c) Montrer par un contre-exemple que b) devient faux en général (donc (a) aussi) quand X n'est pas compact, même si Y l'est (on pourra prendre $X = \mathbf{R}, Y = [0, 1]$).

d) Prouver la réciproque de a), c'est-à-dire : si X est un espace séparé tel que pour tout Y, la projection $p_Y : X \times Y \to Y$ est fermée, alors X est compact. Indications : Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Poser $E =$ l'ensemble des parties de X qui sont des réunions d'un nombre fini de U_i. Poser $Y = X \cup \{\infty\}$ muni de la topologie donnée par la base d'ouverts $\mathcal{P}(X) \cup \{Y \setminus U \mid U \in E\}$. Soit $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$, montrer que le fermé $p_Y(\overline{\Delta})$ est égal à X. En déduire que $X \in E$.

Exercice 78. (Compactifié d'Alexandrov) Soient X un espace topologique séparé et $\infty \notin X$. On définit $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$. On munit $\tilde{X}$ de la topologie suivante : U est un ouvert de $\tilde{X}$ ssi ou bien U est un ouvert de X, ou bien $\tilde{X} \setminus U$ est un compact de X.

a) Vérifier que ceci définit bien une topologie sur $\tilde{X}$.

b) Montrer que si X n'est pas compact alors X est dense dans $\tilde{X}$.

c) Montrer que de tout recouvrement ouvert de $\tilde{X}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

d) En déduire que si X est localement compact alors $\tilde{X}$ est compact. (Rappel : X est localement compact si et seulement si dans X, tout point admet un voisinage compact, ou ce qui est équivalent, tout point admet une base de voisinages compacts).

Exercice 79. Dans un espace topologique séparé E, soient $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de compacts non vides, et $K = \cap_{n\in\mathbf{N}} K_n$.

a) Montrer que K est un compact non vide.

b) Montrer que l'énoncé tombe en défaut si l'on remplace partout "compact" par "fermé".

c) Soit Ω un voisinage ouvert de K. En utilisant un recouvrement ouvert de K_0, montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $K_n \subset \Omega$.

d) On suppose maintenant E compact (non vide). Soit $f : E \to E$ une application continue. On pose $H_0 = E$, $H_{n+1} = f(H_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $H = \cap_{n\in\mathbf{N}} H_n$. Montrer que H est un compact non vide et que $f(H) = H$ (on pourra utiliser les exercices 76.b, 39.a, 38.a, 37.c).

Exercice 80. Soient X un espace séparé et $f : X \times [0,1] \to \mathbf{R}$ une application continue. Montrer que $x \mapsto \int_0^1 f(x,y)dy$ est continue.

4.3 Compacité dans les espaces métriques

Exercice 81. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta$, et $(]\alpha_i, \beta_i[)_{i\in I}$ une famille d'intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ dont la réunion contient $[\alpha, \beta]$. On pose $A = \{x \in [\alpha, \beta] \mid \exists J \subset I, J \text{ fini}, [\alpha, x] \subset \cup_{i\in J}]\alpha_i, \beta_i[\}$.

a) Montrer que $A \neq \emptyset$. On pose $m = \sup(A)$.

b) Montrer que $m \in A$, puis que $m = \beta$.

c) En déduire que $\mathbf{R}$ muni de la topologie usuelle est localement compact.

Exercice 82. Montrer que $\mathbf{R}^n$ muni de la topologie usuelle est localement compact.

Exercice 83. A l'aide d'arguments élémentaires, dire si les espaces suivants sont compacts ou non (pour les topologies usuelles ou précisées dans l'énoncé).

a) La sphère unité S^{n-1} de $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 1$).

b) L'ensemble $S(q,\alpha) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid q(x) = \alpha\}$ où $\alpha \in \mathbf{R}$ et q est une forme quadratique réelle de signature (r,s).

c) Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles.

d) Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ des matrices de déterminant 1.

e) Le groupe orthogonal $O_2(\mathbf{R})$ (on pourra montrer au passage qu'il est homéomorphe à $S^1 \times \{-1,1\}$) ; $O_n(\mathbf{R})$.

f) Le groupe $O_n(\mathbf{C})$.

g) Le groupe $U_n(\mathbf{C})$.

h) Le groupe $O_{1,1}(\mathbf{R})$ des isométries réelles de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 - x_2^2$.

i) Les espaces projectifs $\mathbf{R}P^n$ et $\mathbf{C}P^n$ (avec la topologie quotient usuelle).

j) L'espace $E = \mathbf{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

k) L'espace H des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $\forall k \in \mathbf{N}, 0 \leq x_k \leq \frac{1}{k+1}$, muni de la distance $d(x, y) = (\sum_{k\geq 0}(x_k - y_k)^2)^{1/2}$.

Exercice 84. Montrer que la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^2$ mais est homéomorphe à son compactifié d'Alexandrov (cf exercices 78 et 61)

Exercice 85. (Ensemble triadique de Cantor) Soit C l'ensemble des réels $x \in [0, 1]$ qui admettent un développement triadique ne comportant pas le chiffre 1 : $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 3^{-n}$ avec $\alpha_n \in \{0, 2\}$.

a) Montrer que la surjection naturelle de $\{0, 2\}^{\mathbf{N}^*}$ dans C est injective. En déduire que C a la puissance du continu.

b) Prouver que C est compact.

c) Prouver que C est de mesure de Lebesgue nulle. En déduire que C est d'intérieur vide.

d) Prouver que C est sans point isolé.

Exercice 86. Pour la distance d sur $\mathbf{R}$ définie par $d(x, y) = \min(1, |y - x|)$, montrer que $\mathbf{R}$ est borné, mais non compact (pour la topologie associée à cette distance).

Exercice 87. Soient A, B deux fermés non vides disjoints d'un espace métrique (E, d). On note $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

a) Montrer sur un exemple que l'on peut avoir $d(A, B) = 0$.

b) On suppose de plus que B est compact. Montrer que $d(A, B) > 0$.

c) Dans $\mathbf{R}[X]$ muni de (la distance associée à) la norme N_1 définie par $N_1(P) = \int_0^1 |P(t)|dt$, on pose $A = \{(n+2)X^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ et $B = \{0\}$. Vérifier que A est fermé, B compact et déterminer $d(A, B)$. Existe-t-il $a \in A, b \in B$ tels que $d(A, B) = d(a, b)$?

Exercice 88. Soit A un compact d'un espace métrique (E, d). Montrer que pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, $\cup_{x\in A} B'(x, r)$ est fermé dans E. ($B'(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}$).

Exercice 89. Montrer que dans un espace métrique (E, d), pour tout compact K de E, les ensembles $K_\varepsilon := \{x \in E \mid d(x, K) < \varepsilon\}$ forment une base de voisinages ouverts de K.

Exercice 90. Soient (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Existe-t-il $k \in [0, 1[$ tel que f soit k-lipschitzienne ? (donner soit une preuve, soit un contre-exemple)

Exercice 91. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ continue.

a) Montrer que si f n'a pas de point fixe, il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in E, d(x, f(x)) \geq k$.

b) Montrer que si $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe.

Exercice 92. Soient (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une **dilatation**, c'est-à-dire une application continue vérifiant $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$.

a) Soient $x \in E$ et $F_x = \{f^n(x) \mid n \geq 1\}$. Montrer que x est adhérent à F_x. En déduire que f est bijective.

b) Montrer que f est une isométrie (pour x, y fixés, étudier la suite $(f^n(x), f^n(y)))$.

c) Soient (F, δ) un espace métrique compact et $f : E \to F$, $g : F \to E$ des dilatations. Montrer que ce sont des isométries.

d) Trouver toutes les bijections $f : E \to E$ telles que $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

Exercice 93. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \to E'$ injective telle que l'image par f de tout compact de E soit compacte. Montrer que f est continue.

Chapitre 5. Connexité

5.1 Généralités

Exercice 94. Trouver toutes les topologies sur $X = \{a, b, c\}$ pour lesquelles

a) X est connexe

b) X a deux composantes connexes.

Exercice 95.

a) Soient A un espace topologique connexe et C une partie propre de A (i.e. $C \neq \emptyset, C \neq A$). Montrer que $Fr(C) \neq \emptyset$.

b) Soient X un espace topologique, A et B deux parties de X. Si A est connexe et rencontre B et B^c, montrer que A rencontre $Fr(B)$.

Exercice 96. Soient A, B deux parties connexes d'un espace topologique, vérifiant $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe. *(On pourra raisonner par l'absurde et considérer une fonction continue non constante de $A \cup B$ dans $\{0, 1\}$).*

Exercice 97. Soit X un espace topologique. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts connexes non vides disjoints telle que $X = \cup_{i \in I} O_i$. Montrer que les O_i sont les composantes connexes de X.

Exercice 98. Soient X un espace topologique et $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de connexes de X telle que $\forall n \in \mathbf{N}, A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Montrer que $\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ est connexe.

Exercice 99. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, E le sous-ensemble des bornes de I qui appartiennent à I (donc E a $0, 1$, ou 2 éléments) et f un homéomorphisme de I dans I.

a) Montrer que l'ensemble $\{(x, y) \in I^2, x < y\}$ est une partie convexe (donc connexe par arcs) de $\mathbf{R}^2$.

b) En déduire que f est strictement monotone.

c) Caractériser les éléments de E (parmi ceux de I) en termes de connexité.

d) En déduire que $f(E) = E$.

e) Qu'en déduit-on si l'intervalle I est semi-ouvert ?

Exercice 100. Montrer que si f est continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ elle possède au moins un point fixe. Donner des contre-exemples quand on remplace $[0, 1]$ par $]0, 1]$, $[0, +\infty[$ ou $[0, 1] \cup [2, 3]$.

Exercice 101. Soient $A = [-1,1] \cup \{-2,2\}$ et $B = [-1,1] \cup \{2,3\}$. Montrer que A, B sont homéomorphes, mais qu'il n'existe pas d'homéomorphisme f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ tel que $f(A) = B$.

Exercice 102. Donner un exemple où l'image réciproque d'un connexe par une application continue f n'est pas connexe. Peut-on trouver un exemple avec f bijective ?

Exercice 103. Soit X un espace topologique. On dit que deux points sont connectés lorsqu'ils appartiennent à une même composante connexe. On dit que X est totalement discontinu si deux points distincts ne sont jamais connectés (c'est-à-dire si les composantes connexes de X sont les singletons)

a) Montrer que s'il existe une partition de X en deux ouverts contenant l'un p et l'autre q alors p, q ne sont pas connectés.

b) Montrer que $\mathbf{Q}$ (muni de sa topologie usuelle, induite par celle de $\mathbf{R}$) est totalement discontinu.

c) Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur $\mathbf{R}$ engendrée par les intervalles semi-ouverts $]a, b]$: montrer que $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ est totalement discontinu.

d) Montrer que la réciproque de a) est fausse, en considérant $p = (0,1)$ et $q = (1,-1)$ dans le sous-espace de $\mathbf{R}^2$ $X = \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n$, où $A_0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| = 1\}$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*, A_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| = \frac{n}{n+1}\}$.

Exercice 104. Soit X un espace topologique. Pour $p, q \in X$ on dit qu'une famille finie $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ de parties de X est une *chaîne simple finie* joignant p à q si $(p \in A_i \Leftrightarrow i = 1)$, $(q \in A_i \Leftrightarrow i = m)$ et $(A_i \cap A_j) = \emptyset \Leftrightarrow |i - j| > 1)$. Montrer que si X est connexe et si $\mathcal{A}$ est un recouvrement ouvert de X alors deux points quelconques de X peuvent être reliés par une chaîne simple finie formée d'éléments de $\mathcal{A}$.

5.2 Connexité par arcs, connexité locale

Exercice 105. Soient E un espace vectoriel normé de dimension ≥ 2, et $S(E)$ sa sphère unité.

a) Montrer que $E^* := E \setminus \{0\}$ est connexe (par arcs).

b) En déduire que $S(E)$ aussi, et que la "couronne" $B(0,b) \setminus B'(0,a)$ aussi (pour $0 \leq a < b \leq +\infty$, avec par convention $B(0, +\infty) = E$).

c) Soit A une partie de E étoilée par rapport à 0 (i.e. t.q. $\forall x \in A, [0,x] \subset A$) et bornée, montrer que A^c est connexe par arcs.

d) Montrer que $E \setminus S(E)$ a deux composantes connexes.

Exercice 106. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbf{R}^n$.

a) Si $p < n - 1$, montrer que F^c est connexe (par arcs) *(on pourra s'aider d'un supplémentaire et utiliser la question a de l'exercice précédent)*

b) Si $p = n - 1$, montrer que F^c a deux composantes connexes (par arcs) C^+, C^-, et que $\forall a \in F$, $C^+ \cup \{a\} \cup C^-$ est connexe par arcs, ou plus généralement : pour tout A strictement inclus dans F, A^c est connexe par arcs.

c) Montrer que si $n \geq 2$, $\mathbf{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}$. Montrer que $[a,b]$ $(a, b \in \mathbf{R})$ n'est pas homéomorphe à un disque fermé de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 107. Soient $n \geq 2$ et $S^{n-1} = S(\mathbf{R}^n)$ (connexe, cf supra). Montrer que pour toute application continue $f : S^{n-1} \to \mathbf{R}$, il existe $u \in S^{n-1}$ tel que $f(u) = f(-u)$.

Exercice 108. Soient $C = \{\frac{t}{t+1}(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbf{R}^+\}$, $I = [0,1] \times \{0\}$ et $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

a) Montrer que $C \cup S$ est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

b) Montrer que $C \cup I \cup S$ est connexe par arcs mais n'est pas localement connexe.

Exercice 109. Soient O un ouvert d'un e.v.n. et $a \in O$. Notons $C(a)$ l'ensemble des $x \in O$ reliés à a par un chemin dans O.

a) Montrer que $C(a)$ est un ouvert non vide.

b) Montrer que $C(a)$ est fermé dans O.

c) En déduire que si O est connexe, il est connexe par arcs.

Exercice 110. Si X est une partie de $\mathbf{R}^n$, on dit que X est connexe par chemin parallèle aux axes (c.p.a.) si pour tous $x, y \in X$ il existe une suite finie $(x_0, \ldots, x_k) \in X^{k+1}$ telle que $x_0 = x$, $x_k = y$ et $\forall i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $[x_i, x_{i+1}] \subset X$ et $x_{i+1} - x$ n'a qu'une coordonnée non nulle.

a) Montrer qu'une boule ouverte est connexe par c.p.a. .

b) En procédant comme dans l'exercice précédent, montrer qu'un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$ est connexe par c.p.a. .

Exercice 111. Soient X, Y deux espaces topologiques séparés, $f : X \to Y$ continue, $Y' \subset f(X)$ et $X' = f^{-1}(Y)$.

a) Soit O une composante connexe de Y', pour tout $x \in f^{-1}(O)$ on note U_x sa composante connexe dans X' et on pose $U = \cup_{x \in f^{-1}(O)} U_x$. Montrer que $f(U) \subset O \subset Y' \backslash f(X \backslash U) \subset f(U)$.

b) En déduire que si X est compact et localement connexe alors $f(X)$ est également compact et localement connexe.

c) Déduire de b) que si X_1 et X_2 sont deux parties de Y compactes et localement connexes alors $X_1 \cup X_2$ est également compact et localement connexe.

d) (contre-exemple quand X_1 non compact) Soient $Y = \mathbf{R}^2$, $X_1 = \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0, 1]\}$ et $X_2 = \{0\} \times [-1, 1]$. Montrer que $X_1 \cup X_2$ n'est pas localement connexe alors que X_1 et X_2 le sont.

e) Déduire de d) un contre-exemple au b) dans le cas où X n'est pas compact.

Exercice 112. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe. Montrer que $\forall A, B \in GL_n(\mathbf{C}), \exists H(A, B)$ connexe inclus dans $GL_n(\mathbf{C})$ et contenant A, B (indication : poser $\varphi(z) = zA + (1-z)B$ et remarquer que $det \circ \varphi$ est un polynôme). En déduire que $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe.

Exercice 113. Soit X métrique compact tel que l'adhérence de toute boule ouverte $B(a, r)$ soit égale à la boule fermée $B'(a, r)$ (sauf bien sûr si $r = 0$). Montrer que toute boule fermée est connexe *(On pourra raisonner par l'absurde donc supposer qu'il existe un ouvert-fermé K de $B'(a, R)$, non vide et de contenant pas a, puis poser $r = d(a, K)$ et montrer qu'il existe $b \in K$ tel que $d(a, b) = r$ pour en déduire une contradiction).* En déduire que toute boule ouverte est connexe et que X lui-même est connexe.

6 Espaces complets

6.1 Espace complet

Exercice 114. On munit $\mathbf{R}$ de la distance d_1 définie par $d_1(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

a) Montrer que d_1 est topologiquement équivalente à la distance usuelle d.

b) Montrer que $(\mathbf{R}, d_1)$ n'est pas complet (considérer $(n)_{n\in\mathbf{N}}$).

c) d_1 est-elle uniformément équivalente à d ?

Exercice 115. Soit $E = C([0,1], \mathbf{R})$, on pose
$\forall f, g \in E, d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$ et $\delta(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$.

a) Montrer que d, δ sont des distances sur E.

b) Sont-elles uniformément équivalentes ? (on pourra montrer que E est complet pour l'une mais pas pour l'autre)

c) Soit $B = \{f \in E \mid \forall t \in [0,1], |f(t)| < 1\}$. Dans (E,d), B est-il ouvert ? fermé ?

Exercice 116. Soit $X = \mathbf{R}_+^*$. On définit par $\forall x, y \in X, \delta(x,y) = |\ln \frac{x}{y}|$.

a) Montrer que δ est une distance topologiquement équivalente à la distance usuelle d.

b) Trouver une suite de Cauchy pour d qui n'est pas de Cauchy pour δ.

c) (X,d) et (X,δ) sont-ils complets ?

Exercice 117. On note $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,
$[-\infty, a[= \{-\infty\} \cup]-\infty, a[$ et $]a, +\infty] =]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

a) Soit $\mathcal{B} = \{[-\infty, a[\mid a \in \mathbf{R}\} \cup \{]a, +\infty] \mid a \in \mathbf{R}\} \cup \{]a, b[\mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur $\overline{\mathbf{R}}$. Vérifier que $\mathcal{T}$ induit sur $\mathbf{R}$ la topologie usuelle.

b) Montrer que $\mathbf{R}$ est dense dans $\overline{\mathbf{R}}$ et que $\overline{\mathbf{R}}$ est connexe.

c) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. A quelle condition peut-on prolonger f en une fonction continue $\overline{f} : \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$? On prend f définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$: montrer que $\overline{f}$ existe et réalise un homéomorphisme de $\overline{\mathbf{R}}$ sur son image.

d) En déduire que $\overline{\mathbf{R}}$ est métrisable. L'espace métrique obtenu est-il complet ?

Exercice 118. On considère $d : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{R}_+$ définie par $d(z,z') = |z - z'|$ si $z = 0$ ou $z'/z \in \mathbf{R}_+$ et $d(z,z') = |z| + |z'|$ sinon.

a) Montrer que d est une distance sur $\mathbf{C}$ qui n'est pas topologiquement équivalente à la distance usuelle.

b) Montrer que $(\mathbf{C}, d)$ est complet.

Exercice 119. Soit X un espace métrique.

a) Montrer que toute suite de Cauchy de X est bornée.

b) Montrer que si toutes les boules fermées de X sont compactes alors X est complet.

c) Montrer que cette condition équivaut à : les parties compactes de X sont les fermés bornés.

Exercice 120. Soit X un espace topologique.

a) Vérifier qu'un singleton $\{x\}$ est d'intérieur vide si et seulement si x n'est pas isolé.

b) Montrer que si X est un espace métrique complet sans point isolé, il n'est pas dénombrable.

c) Montrer qu'il n'existe aucune distance d sur $\mathbf{Q}$ ayant pour topologie associée celle induite par la topologie usuelle de $\mathbf{R}$ et telle que $(\mathbf{Q}, d)$ soit complet.

Exercice 121. Soient X un ensemble et $E = X^{\mathbf{N}}$. Si x, y sont deux éléments distincts de E on désigne par $k(x, y)$ le plus petit entier n tel que $x_n \neq y_n$ et on pose $d(x, y) = e^{-k(x,y)}$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$. Montrer que (E, d) est un espace métrique et même ultramétrique (c'est-à-dire vérifiant de plus $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)))$ complet.

Exercice 122. Soient X un ensemble non vide, (E, d) un espace métrique et $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E.

a) Montrer qu'on peut définir une distance δ sur $\mathcal{B}(X, E)$ par : $\delta(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

b) Montrer que (E, d) est complet si et seulement si $(\mathcal{B}(X, E), \delta)$ l'est.

c) On suppose maintenant que X est un espace topologique. Soit $C_b(X, E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{B}(X, E)$ constitué des applications continues et bornées de X dans E. Montrer que $C_b(X, E)$ est fermé dans $\mathcal{B}(X, E)$. En déduire que si (E, d) est complet alors $(C_b(X, E), \delta)$ l'est aussi.

Exercice 123. Soient X un espace topologique et $E = C(X, \mathbf{C})$ l'espace vectoriel des applications continues de X dans $\mathbf{C}$. On suppose qu'il existe une suite de compacts $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}, K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $\cup_{n \in \mathbf{N}} K_n = X$. On pose alors $\forall f, g \in E, d_n(f, g) = \sup_{x \in K_n} |g(x) - f(x)|$ et $d = \sum_{n \in \mathbf{N}} 2^{-n} \inf(1, d_n)$.

a) Montrer que d est une distance sur E.

b) Montrer que (E, d) est complet.

c) Donner un exemple où d ne provient pas d'une norme.

Exercice 124. (Complétion métrique) Soit (E, d) un espace métrique, et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites de Cauchy de E.

a) Montrer que dans $\mathcal{E}$ la relation $\mathcal{R}$ définie par $(x_n)\mathcal{R}(y_n)$ ssi $\lim d(x_n, y_n) = 0$ est une relation d'équivalence. On notera $\overline{(x_n)}$ la classe d'équivalence de (x_n) modulo $\mathcal{R}$, et $\hat{E} = \mathcal{E}/\mathcal{R}$.

b) Pour $\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)} \in \hat{E}$, montrer que le nombre $\lim d(x_n, y_n)$ existe, et est indépendant des représentants (x_n) et (y_n). On le note $\delta(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)})$. Montrer que δ est une distance sur $\hat{E}$.

c) Pour $x \in E$ on pose $f(x) = \overline{(x_n)}$ où $x_n = x$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que f est une isométrie de (E, d) sur $(f(E), \delta)$. Démontrer que $f(E)$ est dense dans $\hat{E}$. En déduire que $(\hat{E}, \delta)$ est un espace métrique complet.

d) Montrer que toute complétion de (E, d) est isométrique à $(\hat{E}, \delta)$. (Une complétion de (E, d) est un espace métrique complet contenant une partie dense isométrique à (E, d)). En déduire que toute complétion métrique de $\mathbf{Q}$ est isométrique à $\mathbf{R}$.

Exercice 125. **(Théorème de Baire)** Soient (X,d) un espace métrique complet non vide, $(\Omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses, $\Omega = \cap_{n\in\mathbf{N}}\Omega_n$. Le but est de montrer que Ω est dense, autrement dit qu'il rencontre tout ouvert U non vide.

a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de points de X et une suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de réels vérifiant $r_n \in]0,1/n]$ tels que $\overline{B(x_1,r_1)} \subset U \cap \Omega_0$ et pour $n \geq 2$, $\overline{B(x_n,r_n)} \subset B(x_{n-1},r_{n-1}) \cap \Omega_n$.

b) Montrer que (x_n) admet une limite et conclure.

c) En déduire que X n'est pas réunion dénombrable d'ensembles rares (c'est-à-dire d'ensembles dont l'adhérence est d'intérieur vide).

6.2 Point fixe

Exercice 126. Soient X un espace métrique complet et $f : X \to X$. On suppose qu'il existe un entier n tel que f^n soit strictement contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 127. Soient $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ et d_α définie sur $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ par
$d_\alpha(m,n) = \alpha + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ si $m \neq n$ et $d_\alpha(m,m) = 0$.

a) Montrer que d_α est une distance sur $\mathbf{N}^*$.

b) $(\mathbf{N}^*, d_\alpha)$ est-il complet ?

c) Montrer que f définie par $f(n) = n+1$ fournit un exemple d'application contractante n'ayant aucun point fixe.

Exercice 128. Soit E l'espace des fonctions continues de $I = [0,1]$ dans $\mathbf{C}$, muni de la distance associée à la norme $\| \ \|_\infty$ ($\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} |f(t)|$). On définit Φ sur E par $\Phi(f)(t) = \int_0^t (\int_0^x uf(u)du)dx$. Montrer que Φ est une contraction stricte de E. En déduire que l'équation différentielle $f''(t) - tf(t) = 0, f(0) = f'(0) = 0$ admet comme seule solution la fonction nulle.

Exercice 129. Soient $E = [2/3, +\infty[$ et $f : E \to \mathbf{R}, x \mapsto \frac{2x+6}{3x+2}$.

a) Montrer que $f(E) \subset E$, que f est contractante, et en déduire que f possède un point fixe.

b) Si on prolonge f à $\mathbf{R} \setminus \{-2/3\}$ par $g(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$, montrer que g n'est pas contractante mais a deux points fixes.

Exercice 130. On considère l'équation fonctionnelle (E) : $f(0) = \alpha, f'(x) = af(x^b)$, où $\alpha \in \mathbf{R}, a > 0, b > 1$, et $x \in [0,1]$.

a) Soit $M > 0$; montrer que $E := \mathbf{C}([0,1],\mathbf{R})$, muni de la norme $\|f\| := \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|e^{-Mx}$, est de Banach.

b) Soit $T : E \to E$ définie par $T(f) = g$ où $g(x) = \alpha + \int_0^x af(t^b)dt$; montrer qu'on peut ajuster M pour que T soit 1/2-contractante.

c) En déduire que (E) admet une unique solution.

Exercice 131. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ continue, non identique à 1, et soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On considère l'équation fonctionnelle (E) d'inconnue $f \in \mathbf{C}^1([0,1],\mathbf{R})$:

$$f'(x) = f(\varphi(x)), \qquad f(0) = \alpha.$$

Soit $T : \mathbf{C}([0,1],\mathbf{R}) \to \mathbf{C}([0,1],\mathbf{R})$ défini par $T(f) = g$ où $g(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t))dt$. Montrer que T^2 est k-contractante, avec $k = \int_0^1 \varphi(t)dt$. En déduire que (E) possède une unique solution.

6.3 Espaces vectoriels normés

6.3.1 sans le dire

Exercice 132. Pour $P = \sum a_i X^i$ et $Q = \sum b_i X^i$ deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ on pose $d(P,Q) = \sup_i |a_i - b_i|$.

a) Montrer que d est une distance sur $\mathbf{R}[X]$.

b) Montrer que $(\mathbf{R}[X], d)$ n'est pas complet (considérer $P_n = \sum_{i=1}^n X^i/i$).

c) Reprendre ces questions avec $d(P,Q) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - Q(t)|$ puis avec $d(P,Q) = \int_0^1 |P(t) - Q(t)|dt$ (il faudra trouver d'autres suites).

Exercice 133. Soit $E = C([0,1], \mathbf{C})$. On définit d_∞, d_1 sur $E \times E$ par $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$ et $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$.

a) Montrer que ce sont deux distances sur E.

b) (E, d_∞) et (E, d_1) sont-ils complets ?

c) Le sous-espace C des fonctions constantes est-il fermé dans (E, d_∞) ? dans (E, d_1) ? (C, d_∞) et (C, d_1) sont-ils complets ?

d) Mêmes questions pour le sous-espace $B = \{f \in E \mid \forall t \in [0,1], |f(t)| \leq 1\}$.

6.3.2 en le disant

Exercice 134. $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Montrer qu'une forme linéaire sur un k-espace vectoriel normé est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 135. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel topologique (c'est-à-dire muni d'une topologie rendant les opérations continues). Si $V \subset E$ et $\lambda \in \mathbf{C}$, on note $\lambda V = \{\lambda v \mid v \in V\}$. On note U l'ensemble des complexes de module 1.

a) Soit V un voisinage de 0 dans E, montrer que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{t \in \mathbf{R}_+^* \mid x \in tV\}$ est non vide. On notera dans la suite $\mu_V(x)$ l'inf de cet ensemble.

b) Montrer que si V est convexe (c'est-à-dire $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda)y \in V$) alors $\forall x, y \in V, \mu_V(x+y) \leq \mu_V(x) + \mu_V(y)$ et $\forall t \geq 0, \mu_V(tx) = t\mu_V(x)$.

c) Montrer que si V est en plus équilibré (c'est-à-dire $\forall \lambda \in U, \lambda V = V$) alors $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{C}, \mu_V(\lambda x) = |\lambda|\mu_V(x)$.

d) Montrer que si $(E, \| \|)$ est un e.v.n. et V un voisinage de 0 borné, convexe et équilibré alors μ_V est une norme sur E.

e) Montrer que de plus cette norme est équivalente à $\| \|$.

Exercice 136. Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E et E/F l'ensemble-quotient. On pose $\forall X \in E/F, N(X) = \inf_{x\in X} \|x\|$.

a) Montrer que N est une norme sur E/F si et seulement si F est fermé.

b) On suppose dans toute la suite F fermé. Montrer que la surjection canonique $\varphi : E \to E/F$ est continue.

c) Montrer que si E est complet, E/F est un espace de Banach.

Exercice 137. Pour $p \in [1, +\infty[$ on note ℓ^p l'espace des suites complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p$ converge. Pour $x \in \ell^p$, on note $N_p(x) = (\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p)^{1/p}$. ℓ^∞ désigne l'ensemble des suites bornées et pour $x \in \ell^\infty$ on note $N_\infty(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$.

a) Montrer que si $p \in [1, +\infty]$, N_p est une norme sur ℓ^p.

b) Montrer que si $p \in [1, +\infty]$, (ℓ^p, N_p) est un espace de Banach.

c) Montrer que si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, l'injection canonique de ℓ^p dans ℓ^q est continue de norme 1.

d) On suppose dans la suite que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$). Montrer que $(\ |\ )$: $\ell^p \times \ell^q \to \mathbf{C}, (x, y) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k$ est une forme bilinéaire continue (utiliser Hölder).

Exercice 138. $\ell^1(\mathbf{C})$ est muni de sa norme usuelle $\|\ \|_1$ (si $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^1(\mathbf{C})$, $\|a\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$). Pour $k \in \mathbf{N}$ on note $e^{(k)} = (\delta_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ où $\delta_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = k \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k \end{cases}$.

a) Soit $u \in (\ell^1)' = \mathcal{L}(\ell^1, \mathbf{C})$ (dual topologique de ℓ^1).

   i) On note $\forall k \in \mathbf{N}$, $\eta_k := u(e^{(k)})$. Vérifier que la suite $\eta = (\eta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée et que $\|\eta\|_\infty \leq |||u|||$.

   ii) Si $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^1$ alors on a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{(k)} = a$. Montrer que $|u(a)| \leq \|\eta\|_\infty \|a\|_1$. En déduire que $|||u||| \leq \|\eta\|_\infty$.

b) Pour $u \in (\ell^1)'$ on pose $\Phi(u) = (u(e^{(k)}))_{k\in\mathbf{N}}$.

   i) Vérifier que l'on définit ainsi une application linéaire Φ de $(\ell^1)'$ dans ℓ^∞.

   ii) Vérifier que Φ conserve les normes (i.e. $\|\Phi(u)\|_\infty = |||u|||$).

   iii) Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty$; pour $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^1$ on pose $u_y(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n$; vérifier que $u_y \in \mathcal{L}(\ell^1, \mathbf{C})$. En déduire que Φ est surjective.

   Remarque : Φ est donc une isométrie, du dual topologique $(\ell^1)'$ de ℓ^1, sur $(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$.

Exercice 139. Soient X un espace métrique et $E = C(X, \mathbf{C})$ l'espace des applications continues de X dans $\mathbf{C}$. Pour toute application $g : X \to \mathbf{C}$ on note $Z_g = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$, $E_g = \{f \in E \mid fg \text{ bornée sur } X\}$ et, pour $f \in E_g, N_g(f) = \sup_{x\in X} |f(x)g(x)|$.

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que N_g soit une norme sur E_g.

b) Montrer que si $\inf_{x\in X} |g(x)| > 0$, (E_g, N_g) est un espace de Banach.

c) On prend $X = [-1, 1]$ et $g(x) = x$. Montrer que (E_g, N_g) n'est pas complet.

Exercice 140. Une algèbre de Banach unitaire est un espace de Banach A (sur $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) muni d'une structure d'algèbre unitaire telle que $\forall a, b \in A, \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$.

a) Soit E un espace de Banach. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des "opérateurs bornés" (c'est-à-dire des applications linéaires continues) de E dans E possède une structure naturelle d'algèbre de Banach unitaire.

b) Soit désormais A une algèbre de Banach unitaire quelconque, d'unité e. Montrer que l'on peut supposer $\|e\| = 1$.

c) On note $G(A)$ l'ensemble des inversibles de A. Montrer que $\forall a \in A, \|a\| < 1 \Rightarrow e - a \in G(A)$.

d) En déduire que $G(A)$ est un ouvert non vide.

e) Pour $a \in A$ on note $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \lambda e - a \notin G(A)\}$. Montrer que $\sigma(a)$ est un compact de $\mathbf{C}$.

f) Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme de $G(A)$ dans lui-même.

g) Montrer que pour tout $a \in A$, $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ définit un élément de A (avec par convention $a^0 = e$).

h) Montrer que si $a, b \in A$ commutent, alors $e^{a+b} = e^a e^b$. En déduire que $\forall a \in A, e^a \in G(A)$.

Exercice 141. L'espace $E = \mathcal{C}_b(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ des fonctions continues bornées sur $\mathbf{R}^+$ à valeurs réelles est muni de la norme $\| \; \|_\infty$ de la convergence uniforme. Soit $F = \{f \in E \mid \lim_{t \to +\infty} f(t) = 0\}$.

a)

i) Vérifier que $(F, \| \; \|_\infty)$ est un espace de Banach.

ii) Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq n \\ n+1-t & \text{si} \quad n \leq t \leq n+1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq n+1 \end{cases}$. Vérifier que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille libre de F ; l'e.v.n. F est-il localement compact ?

b) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} F \times F & \to & F \\ (f, g) & \mapsto & fg \end{array}$. Vérifier que φ est bilinéaire continue et déterminer sa norme.

Exercice 142. Soit E un espace de Banach. On dit qu'un endomorphisme T de E est un opérateur compact si $T(B(0,1))$ est d'adhérence compacte dans E.

a) Montrer que si T compact et $\lambda \neq 0$, l'espace propre $\mathrm{Ker}(T - \lambda id)$ est de dimension finie.

b) Pour $E = C([0,1], \mathbf{C})$ et $T(u)(x) = \int_0^x u(t) dt$, montrer que T est un opérateur compact et calculer ses sous-espaces propres.