
Enoncé

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux espaces affines et f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

1) Dans cette question on suppose f affine.
   a) (Re-)démontrer que f est injective ssi $\overrightarrow{f}$ l'est.
   b) (Re-)démontrer que si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F alors $f(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ de direction $\overrightarrow{f}(F)$.
   c) En déduire que si f est injective, f envoie toute droite de $\mathcal{E}$ sur une droite de $\mathcal{E}'$, et envoie deux droites parallèles sur des droites parallèles.
2) Soient O, A, B trois points non alignés de $\mathcal{E}$. Pour tout $M \in (OA)$, soient M' le point d'intersection de (OB) avec la parallèle à (AB) passant par M, et M'' le point d'intersection de (OA) avec la parallèle à (MB) passant par M'. Démontrer que lorsque M parcourt la droite (OA), M'' parcourt la demi-droite fermée $[OA)$.
3) Dans cette question on suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension ≥ 2, que f envoie toute droite de $\mathcal{E}$ bijectivement sur une droite de $\mathcal{E}'$ (donc f est injective), et que f envoie deux droites parallèles sur des droites parallèles. Le but est d'en déduire que f est affine.
   a) Montrer que l'image par f d'un parallélogramme est un parallélogramme (on pourra commencer par le cas d'un parallélogramme non aplati).
   b) En déduire que l'application $u : E \to E', \overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{f(M)f(N)}$ est bien définie.
   c) Vérifier que $\forall x, y \in E, u(x+y) = u(x) + u(y)$.
   En déduire que $\forall x \in E, u(\lambda x) = \lambda u(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{Z}$, puis pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}$.
   d) Montrer (en utilisant 2) que pour tous points distincts $O, A \in \mathcal{E}$, $f([O,A)) = [f(O), f(A))$.
   e) En déduire que $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ est vrai pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, et conclure.

Solution

1)
   a) Soient $O \in \mathcal{E}$ et $O' = f(O)$, on a $\forall x \in E, \overrightarrow{f}(x) = \overrightarrow{O'f(O+x)}$ (d'où : si f est injective alors $\overrightarrow{f}$ aussi), et de manière équivalente, $\forall M \in \mathcal{E}, f(M) = O' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ (d'où : si $\overrightarrow{f}$ est injective alors f aussi). Remarquons que pour démontrer cette équivalence on n'a pas utilisé que f est affine (c'est-à-dire que $\overrightarrow{f}$ est linéaire).
   b) Si $\mathcal{F} = P + F$ alors $f(\mathcal{F}) = f(P) + \overrightarrow{f}(F)$.
   c) Si f est injective et si F est une droite vectorielle de E, d'après a) $\overrightarrow{f}(F)$ est une droite vectorielle de E', et d'après b) toutes les droites affines $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ de direction F ont pour image par f des droites affines de $\mathcal{E}'$ de direction $f(F)$.
2) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$, alors (par Thalès) $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OM''} = \lambda\overrightarrow{OM} = \lambda^2\overrightarrow{OA}$.
3)
   a) Soient (A, B, C, D) un parallélogramme (i.e. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, ou, ce qui est équivalent, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$) et (A', B', C', D') son image par f. Si (A, B, C, D) est non aplati (c'est-à-dire si les quatre points ne sont pas alignés) alors A, B, D sont non alignés et $(DC)//(AB)$ et $(BC)//(AD)$, donc idem en remplaçant (A, B, C, D) par (A', B', C', D'), donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $\overrightarrow{D'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{B'C'} = \mu\overrightarrow{A'D'}$, d'où $\lambda\overrightarrow{A'B'} - \mu\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D'}$ donc $\lambda = \mu = 1$ donc (A', B', C', D') est un parallélogramme. Si (A, B, C, D) est aplati mais $A \neq B$, il existe (puisque $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$) $P, Q \in \mathcal{E}$ tels que (A, B, P, Q) et (P, Q, C, D) forment deux parallélogrammes non aplatis. On se ramène ainsi au cas précédent. Enfin, si $A = B$ (donc $C = D$) alors $A' = B'$ et $C' = D'$.
   b) Si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{f(D)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.
   c) Etant donnés $x, y \in E$, soient $M \in \mathcal{E}$ (arbitraire), $N = M + x$, et $P = N + y = M + (x+y)$, alors $u(x+y) = u(\overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{f(M)f(P)} = \overrightarrow{f(M)f(N)} + \overrightarrow{f(N)f(P)} = u(x) + u(y)$. On en déduit (par récurrence sur $|n|$) $\forall n \in \mathbf{Z}, u(nx) = nu(x)$, d'où $\forall m \in \mathbf{N}^*, mu(\frac{n}{m}x) = u(nx) = nu(x)$ donc $u(\frac{n}{m}x) = \frac{n}{m}u(x)$.

d) Soit $B \in \mathcal{E} \setminus (OA)$. Il suffit, dans la question 2), d'appliquer simultanément la construction sur $O, A, B, M \in \mathcal{E}$ et sur leurs images par f, en remarquant que $f(M') = f(M)'$ et $f(M'') = f(M)''$.

e) Soient $M, N \in \mathcal{E}$, notons $M_\lambda = \lambda N + (1-\lambda)M$ et $M'_\mu = \mu f(N) + (1-\mu) f(M)$. Par définition de u on a donc : $f(M_\lambda) = M'_\mu \Leftrightarrow u(\lambda \overrightarrow{MN}) = \mu u(\overrightarrow{MN})$. D'après c) on en déduit $\forall \lambda \in \mathbf{Q}, f(M_\lambda) = M'_\lambda$. Donc d'après d), $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Q}, f([M_\alpha, M_\beta]) = [M'_\alpha, M'_\beta]$, d'où $\forall \lambda \in \mathbf{R}, f(M_\lambda) = M'_\lambda$ (en prenant l'intersection sur les $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$ tels que $\alpha \leq \lambda \leq \beta$), i.e. $u(\lambda \overrightarrow{MN}) = \lambda u(\overrightarrow{MN})$. Ceci (joint à la question c) prouve que u est linéaire, donc que f est affine.