MAPES – Algèbre et Géométrie, compléments d'algèbre linéaire (avril 2008)
(à propos du début de l'exercice 4 de la feuille 4)

Enoncé

Soient E, F deux espaces vectoriels. Leurs e.v. duaux sont noté E^*, F^* ($E^* = L(E, \mathbf{R}) =$ l'e.v. des formes linéaires sur E). Soit $L : E \to F$ une application linéaire. Son application linéaire transposée est notée L^t ($L^t : F^* \to E^*, \varphi \mapsto \varphi \circ L$). Pour tout s.e.v. G de E on note G° le s.e.v. de E^* constitué des formes linéaires qui s'annulent sur G (de même, pour tout s.e.v. H de F, on note $H^\circ \ldots$).

a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(L^t) = (\mathrm{Im}L)^\circ$.

b) En déduire que L^t est injective ssi L est surjective.

c) Démontrer que $\mathrm{Im}(L^t) = (\mathrm{Ker}L)^\circ$.

d) En déduire que L^t est surjective ssi L est injective.

e) On suppose désormais $F = \mathbf{R}^m$, et on note L_i les composantes de L. Déduire de b) que L est surjective ssi $(L_1, \ldots, L_m)$ est libre. Déduire de d) que L est injective ssi $(L_1, \ldots, L_m)$ engendre E^*.

Solution

a) Soit $\varphi \in F^*$. On a $\varphi \in \mathrm{Ker}(L^t) \Leftrightarrow \varphi \circ L = 0 \Leftrightarrow \varphi$ s'annule sur $\mathrm{Im}L \Leftrightarrow \varphi \in (\mathrm{Im}L)^\circ$.

b) D'après a), L^t est injective ssi $(\mathrm{Im}L)^\circ = \{0\}$, i.e. ssi la seule forme linéaire sur F qui s'annule sur le s.e.v. $\mathrm{Im}L$ est la forme nulle, i.e. ce qui équivaut à $\mathrm{Im}L = F$ (l'implication dans un sens est claire, et pour la réciproque il suffit, si $\mathrm{Im}L \neq F$, de choisir un hyperplan contenant $\mathrm{Im}L$ et une forme dont le noyau est cet hyperplan).

c) Soit $\psi \in E^*$. On a $\psi \in \mathrm{Im}(L^t)$ ssi ψ est de la forme $\varphi \circ L$ pour un certain $\varphi \in F^*$. Ceci implique évidemment que ψ est nulle sur $\mathrm{Ker}L$ (autrement dit, que $\psi \in (\mathrm{Ker}L)^\circ$), mais réciproquement, si $\mathrm{Ker}L \subset \mathrm{Ker}\psi$ alors ψ est de la forme $\varphi \circ L$ pour un certain $\varphi \in F^*$: pour construire un tel φ il suffit de noter α la forme linéaire sur $\mathrm{Im}L$ définie par $\alpha(L(x)) = \psi(x)$ (cette définition est non ambigue car si $L(x) = L(y)$ alors $x - y \in \mathrm{Ker}L \subset \mathrm{Ker}\psi$), de choisir arbitrairement un supplémentaire V de $\mathrm{Im}L$ dans F et une forme linéaire β sur ce V (par exemple $\beta = 0$), et de poser $\varphi(u + v) = \alpha(u) + \beta(v)$ pour $u \in \mathrm{Im}L$ et $v \in V$.

d) D'après c), L^t est surjective ssi $(\mathrm{Ker}L)^\circ = E^*$, i.e. ssi toute forme linéaire sur E s'annule sur le s.e.v. $\mathrm{Ker}L$, i.e. ssi $\mathrm{Ker}L = \{0\}$.

e) Notons $p_1, \ldots, p_m : F \to \mathbf{R}$ les m projections canoniques (qui forment une base de F^*), alors $L_i = L^t(p_i)$ donc les L_i forment un système libre ssi L^t est injective, i.e. d'après b) ssi L est surjective. De même les L_i forment un système générateur (de E^*) ssi L^t est surjective, i.e. d'après d) ssi L est injective.