

Exercice 1. Soit \mathcal{E} un espace affine, \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} , et \mathcal{H} un hyperplan affine. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :

1. $\vec{F} \subset \vec{H}$.
2. $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ est un sous-espace affine de dimension $\dim \mathcal{F} - 1$.

Si $\vec{F} \not\subset \vec{H}$, alors $\vec{F} + \vec{H} = \vec{E}$. Soit alors $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{H}$. Il y a une identité vectorielle $\vec{AB} = \vec{f} + \vec{h}$ et donc $A + \vec{f} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$. L'espace $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ est alors $A + \vec{F} \cap \vec{H}$, sa dimension est :

$$\dim \vec{F} \cap \vec{H} = \dim \vec{F} + \dim \vec{H} - \dim \vec{E} = \dim \mathcal{F} - 1.$$

Exercice 2. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension n , d'espace vectoriel directeur \vec{E} .

1. Soit ϕ une application affine non constante de \mathcal{E} dans \mathbf{R} . Montrer que ϕ est surjective. Montrer que $\phi^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} de dimension $n - 1$ (on précisera le sous-espace directeur en fonction de ϕ). Réciproquement, montrer que tout hyperplan affine de \mathcal{E} est de cette forme.
2. (a) Dans \vec{E} , montrer que, pour $1 \leq d \leq n$, tout sous-espace vectoriel de dimension $n - d$ est intersection de d hyperplans.
 (b) En déduire que tout sous-espace affine de \mathcal{E} de dimension $n - d$ est de la forme $\bigcap_{i=1}^d \phi_i^{-1}(\{0\})$ pour $(\phi_i)_{i=1, \dots, d}$ une famille d'applications affines $\mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$, c'est-à-dire est intersection de d hyperplans affines.
 (c) Montrer que, dans ce cas, l'application affine produit $\times_i \phi_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}^d$ est surjective.
3. Réciproquement, montrer que si ϕ_1, \dots, ϕ_d sont des fonctions affines telles que l'application affine produit est surjective, alors l'intersection $\bigcap_{i=1, \dots, d} \phi_i^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace affine de dimension $n - d$ (on pourra procéder par récurrence sur d , et utiliser l'exercice 1).

Soit A et B deux points tels que $\phi(A) \neq \phi(B)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on trouve $\phi(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda\phi(A) + (1 - \lambda)\phi(B)$, ce qui est une paramétrisation de \mathbf{R} . Donc ϕ est surjective.

Soit \vec{H} le noyau de l'application linéaire associée à ϕ . C'est un hyperplan de \vec{E} . L'ensemble $\phi^{-1}(\{0\})$ a une structure de sous-espace affine dirigé par \vec{H} .

Tout hyperplan affine \mathcal{H} admet un hyperplan directeur \vec{H} . On choisit une forme linéaire $\vec{\phi}$ qui admette \vec{H} pour noyau. Soit alors O un point de \mathcal{H} , tout point A de \mathcal{E} s'écrit de manière unique $A = O + \vec{OA}$, et on définit l'application affine :

$$\phi(A) = \vec{\phi}(\vec{OA}),$$

dont on vérifie facilement qu'elle répond au problème.

Dans un espace vectoriel \vec{E} de dimension n , tout sous-espace vectoriel \vec{F} de dimension $n - d$ est intersection des noyaux de d formes linéaires. Elles peuvent être obtenues par exemple de la façon suivante : on fixe un supplémentaire \vec{G} de \vec{F} dans \vec{E} , on choisit une base $(e_1, \dots, e_{n-d}, e_{n-d+1}, \dots, e_n)$ de \vec{E} adaptée à cette décomposition ; on considère la base duale associée, et la famille de formes linéaires $(e_{n-d+1}^*, \dots, e_n^*)$ convient.

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} de dimension $n - d$. L'espace vectoriel directeur \vec{F} est $\cap \vec{H}_i$ d'après ce qui précède, avec $\vec{H}_i = \vec{\phi}_i^{-1}(0)$. On conclut comme précédemment en prenant $O \in \mathcal{F}$.

L'application produit des ϕ_i est bien une application affine. Son image est un sous-espace affine de \mathbf{R}^d . Le noyau de l'application linéaire associée est \vec{F} . Par dimension, on obtient la surjectivité de l'application linéaire associée, donc de l'application affine.

Pour la réciproque, on procède par exemple par récurrence : le cas $d = 1$ est traité, supposons que l'assertion est vraie pour un certain d . Soit $d + 1$ fonctions affines telles que l'application produit soit surjective (sur \mathbf{R}^{d+1}). Alors l'application produit sur les d premières est aussi surjective (sur \mathbf{R}^d). On note \mathcal{F} le sous-espace affine $\cap_{i=1, \dots, d} \phi_i^{-1}(\{0\})$, il est de dimension $n - d$ par hypothèse de récurrence. Son espace directeur \vec{F} n'est pas inclus dans \vec{H}_{d+1} (car sinon le noyau de $\times_{i=1, \dots, d+1} \vec{\phi}_i$ contiendrait \vec{F} , serait donc de dimension au moins $n - d$, et le rang de l'application serait au plus d). On conclut avec l'exercice 1.

Exercice 3. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension n , et (a_0, \dots, a_n) un repère affine.

1. Montrer que pour tout i , il existe une unique application affine $\phi_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\phi_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
2. Exprimer l'image d'un point par ϕ_i en fonction de ses coordonnées barycentriques dans le repère des a_i .
3. Montrer que l'ensemble $Aff(\mathcal{E}, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de \mathcal{E} dans \mathbf{R} . Dédurre de ce qui précède que sa dimension est au moins $n + 1$.
4. Montrer que tout élément $\phi \in Aff(\mathcal{E}, \mathbf{R})$ s'écrit $\phi = \sum_i \phi(a_i)\phi_i$. En déduire la dimension de $Aff(\mathcal{E}, \mathbf{R})$.

Le premier point est clair via la caractérisation des applications affines par conservation du barycentre. Si un point s'écrit $a = \sum_i \alpha_i a_i$ en coordonnées barycentriques avec $\sum_i \alpha_i = 1$, alors $\phi_i(a) = \alpha_i$.

L'ensemble $Aff(\mathcal{E}, \mathbf{R})$ est stable par addition, multiplication externe et contient le neutre : l'application nulle. Toute relation de colinéarité entre les ϕ_i est triviale donc l'assertion sur la dimension s'en déduit. Le dernier point est clair.

Exercice 4. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension n , $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_n$ $n + 1$ hyperplans affines tels que l'intersection $\cap_{i=0}^n \vec{H}_i$ des espaces vectoriels directeurs soit réduite au vecteur nul. Notons ϕ_i des fonctions affines telles que $\phi_i^{-1}(0) = \mathcal{H}_i$.

1. Montrer que l'application linéaire produit $\times_{i=0}^n \vec{\phi}_i : \vec{E} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ est injective. En déduire que la famille $(\vec{\phi}_i)_{i=0, \dots, n}$ engendre l'espace des formes linéaires sur \vec{E} (les relations de colinéarité de cette famille s'identifient à l'orthogonal de $\text{Im}(\times_{i=0}^n \vec{\phi}_i)$ dans \mathbf{R}^{n+1} muni du produit scalaire canonique).
2. Justifier qu'on peut supposer que la sous-famille $(\vec{\phi}_i)_{i=1, \dots, n}$ est une base. Montrer que l'intersection $\cap_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ est réduite à un point O (on pourra utiliser l'exercice 2).
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\bigcap_{i=0}^n \mathcal{H}_i \neq \emptyset$.
 (b) la famille de fonctions affines $(\phi_i)_{i=0, \dots, n}$ est liée.
 (c) pour tout repère affine (a_0, \dots, a_n) , la matrice :

$$\begin{pmatrix} \phi_0(a_0) & \dots & \phi_n(a_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_0(a_n) & \dots & \phi_n(a_n) \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

L'application linéaire produit $\times_{i=0}^n \overrightarrow{\phi}_i$ est injective de \overrightarrow{E} dans \mathbf{R}^{n+1} , donc de rang n . Toute relation de colinéarité $\sum_i \alpha_i \overrightarrow{\phi}_i$ s'identifie au vecteur des coefficients α_i , et induit pour tout x la relation d'orthogonalité : $\langle (\alpha_i)_i, (\overrightarrow{\phi}_i(x))_i \rangle$. L'espace de ces relations de colinéarité est donc de dimension 1 en tant qu'orthogonal d'un sous-espace de dimension n dans un espace de dimension $n+1$. On en déduit que l'espace engendré par les ϕ_i a pour dimension $n+1-1=n$, et donc la conclusion.

De toute famille génératrice on peut extraire une sous-famille génératrice minimale, cela justifie l'hypothèse. Le deuxième point est un cas particulier de la dernière question de l'exercice 2.

(1) \Rightarrow (2) : on suppose donc $O \in \mathcal{H}_0$, et on se donne une expression $\overrightarrow{\phi}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{\phi}_i$. Alors pour tout point M :

$$\phi_0(M) = \phi_0(O) + \overrightarrow{\phi}_0(\overrightarrow{OM}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{\phi}_i(\overrightarrow{OM}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(M)$$

ce qui montre que la famille $(\phi_i)_i$ est liée.

(2) \Rightarrow (1) : il n'y a pas de dépendance linéaire non triviale dans $(\overrightarrow{\phi}_i)_{i=1, \dots, n}$, il n'y en a donc a fortiori pas dans $(\phi_i)_{i=1, \dots, n}$. On peut donc supposer qu'on a une relation de la forme $\phi_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i = 0$. Le point O est alors clairement dans \mathcal{H}_0 .

(2) \Leftrightarrow (3) est clair : une relation de dépendance linéaire entre les ϕ_i fournit une relation de dépendance linéaire entre les colonnes de la matrice et réciproquement (car on a un repère).

Exercice 5. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension n . Soit $\mathcal{D}_0, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$ des droites toutes parallèles (\overrightarrow{u} un vecteur directeur). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes (on parlera de droites parallèles en configuration générique).

1. pour $1 \leq d \leq n$, tout d -uplet de ces droites engendre un sous-espace de \mathcal{E} de dimension d .
2. le sous-espace affine engendré par $\mathcal{D}_0, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$ est \mathcal{E} tout entier.
3. pour tout choix de $0 \leq k \leq n-1$, pour toute donnée de points $A_i \in \mathcal{D}_i$ ($0 \leq i \leq n-1$), en posant $A_n = A_k + \overrightarrow{u}$, (A_0, \dots, A_n) est un repère affine de \mathcal{E} .

(1) \Rightarrow (2) est évident.

(2) \Rightarrow (3). Le sous-espace affine engendré par ces droites est aussi le sous-espace affine engendré par les points ainsi donnés : une inclusion est évidente, l'autre provient facilement du paramétrage $\mathcal{D}_i = A_i + \mathbf{R} \overrightarrow{u}$. Le $(n+1)$ -uplet de points (A_0, \dots, A_n) engendre \mathcal{E} , c'est donc un repère affine.

(3) \Rightarrow (1). La donnée d'un d -uplet de droites revient à extraire une famille de $d+1$ points d'un repère affine ; ces $d+1$ -points engendrent donc un espace affine de dimension d .

Exercice 6. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension ≥ 2 , \mathcal{E}' un autre espace affine et f une application de \mathcal{E} dans \mathcal{E}' telle que : f envoie toute droite de \mathcal{E} sur une droite de \mathcal{E}' et induit une bijection entre ces droites ; et f envoie deux droites parallèles sur des droites parallèles.

1. Montrer que f est injective puis que $\dim \mathcal{E}' \geq 2$.
2. Montrer que l'image par f d'un parallélogramme est un parallélogramme.
3. Soit \mathcal{P} un plan affine dans \mathcal{E} , et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites sécantes de \mathcal{P} . Montrer que $f(\mathcal{P})$ est inclus dans le plan engendré par $f(\mathcal{D}_1) \cup f(\mathcal{D}_2)$. Montrer que f définit une bijection entre ces deux plans.
4. Montrer que tout sous-espace affine de \mathcal{E} est envoyé bijectivement par f sur un sous-espace de \mathcal{E}' de même dimension.
5. Soit $O \in \mathcal{E}$. On définit \vec{u} application de \vec{E} dans \vec{E}' par $\vec{u}(\vec{x}) = \overrightarrow{f(O)f(O + \vec{x})}$. Montrer que $\vec{u}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{u}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{y})$, pour tous \vec{x}, \vec{y} indépendants, puis pour x et y liés (on écrira dans ce cas $\vec{x} + \vec{y} = \vec{x} + \vec{z} + \vec{y} - \vec{z}$ pour un vecteur \vec{z} non lié aux deux autres).
6. Montrer que, pour tout $(\vec{x}, \lambda) \in \vec{E} \times \mathbf{R}$, il existe $\sigma(\vec{x}, \lambda) \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\vec{u}(\lambda \vec{x}) = \sigma(\vec{x}, \lambda) \vec{u}(\vec{x}).$$

Montrer que σ est indépendant de \vec{x} . Montrer que c'est un automorphisme de corps de \mathbf{R} , et en déduire que \vec{u} est linéaire.

Soient A et B deux points distincts, l'hypothèse assure que f est injective sur la droite les reliant, donc $f(A) \neq f(B)$. L'hypothèse sur la dimension assure qu'on peut trouver deux droites parallèles distinctes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 dans \mathcal{E} . Leurs images dans \mathcal{E}' sont deux droites parallèles. Soit Δ une sécante à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , P_1 et P_2 les points d'intersection. Par injectivité, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ sont distincts, donc $f(\mathcal{D}_1)$ et $f(\mathcal{D}_2)$ sont distinctes. Puisque \mathcal{E}' contient deux droites parallèles distinctes il est bien de dimension au moins 2.

Pour la conservation d'un parallélogramme, il suffit de remarquer qu'un parallélogramme est codé par la donnée de deux couples $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2)$ de droites, tels que les droites d'un même couple sont parallèles, et deux droites pas dans le même couple sont sécantes. Cette configuration est conservée par f .

Tout point du plan \mathcal{P} est sur une parallèle à \mathcal{D}_2 sécante avec \mathcal{D}_1 , donc est envoyé sur une parallèle à $f(\mathcal{D}_2)$ sécante avec $f(\mathcal{D}_1)$ donc dans le plan \mathcal{P}' engendré par $f(\mathcal{D}_1) \cup f(\mathcal{D}_2)$. Il s'agit maintenant de montrer une propriété de surjectivité. Soit $M \in \mathcal{P}'$. Alors, il existe une (unique) parallèle à $f(\mathcal{D}_2)$ passant par M . Son point d'intersection avec $f(\mathcal{D}_1)$ admet une préimage $N \in \mathcal{D}_1$. L'image de la parallèle à \mathcal{D}_2 passant par N est une parallèle à $f(\mathcal{D}_2)$ passant par $f(N)$, et c'est une droite passant par M .

La généralisation à un sous-espace affine de dimension quelconque se fait par récurrence. Supposons que ce soit vrai pour tout sous-espace de dimension d . Soit \mathcal{F} un sous-espace de dimension $d + 1$, on choisit $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ de dimension d , \mathcal{D} une droite sécante à \mathcal{F}' , incluse dans \mathcal{F} . Alors tout point de \mathcal{F} est sur une parallèle à \mathcal{D} sécante à \mathcal{F}' , et on conclut par le même raisonnement que ci-dessus. En particulier, $\dim \mathcal{E}' \geq \dim \mathcal{E}$.

Les points $O, O + \vec{x}, O + \vec{y}, O + \vec{x} + \vec{y}$ forment un parallélogramme. Il en est donc de même de leurs images. On vérifie alors facilement la relation souhaitée.

Le calcul suivant permet de conclure :

$$\begin{aligned}
 \vec{u}(\vec{x} + \vec{y}) &= \vec{u}(\vec{x} + \vec{z} + \vec{y} - \vec{z}) \\
 &= \vec{u}(\vec{x} + \vec{z}) + \vec{u}(\vec{y} - \vec{z}) \\
 &= \vec{u}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{z}) + \vec{u}(\vec{y}) - \vec{u}(\vec{z}) \\
 &= \vec{u}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{y})
 \end{aligned}$$

L'existence de $\sigma(\vec{x}, \lambda)$ provient simplement de la conservation de l'alignement. On prend ensuite \vec{x}, \vec{y} indépendants, et on fait le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 \sigma(\vec{x}, \lambda) \vec{u}(\vec{x}) + \sigma(\vec{y}, \lambda) \vec{u}(\vec{y}) &= \vec{u}(\lambda \vec{x}) + \vec{u}(\lambda \vec{y}) \\
 &= \vec{u}(\lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}) \\
 &= \sigma(\vec{x} + \vec{y}, \lambda) \vec{u}(\vec{x} + \vec{y}) \\
 &= \sigma(\vec{x} + \vec{y}, \lambda) (\vec{u}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{y})).
 \end{aligned}$$

Par les propriétés d'injectivité, les vecteurs $\vec{u}(\vec{x})$ et $\vec{u}(\vec{y})$ sont indépendants, et par identification des coefficients dans l'égalité ci-dessus, on trouve :

$$\sigma(\vec{x}, \lambda) = \sigma(\vec{x} + \vec{y}, \lambda) = \sigma(\vec{y}, \lambda).$$

L'indépendance de σ par rapport à \vec{x} s'en déduit. L'additivité de σ par rapport à λ se déduit du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 \sigma(\lambda + \mu) \vec{x} &= \vec{u}((\lambda + \mu) \vec{x}) \\
 &= \vec{u}(\lambda \vec{x} + \mu \vec{x}) \\
 &= \vec{u}(\lambda \vec{x}) + \vec{u}(\mu \vec{x}) \\
 &= \sigma(\lambda) \vec{x} + \sigma(\mu) \vec{x}.
 \end{aligned}$$

La multiplicativité se montre de la même manière. La surjectivité provient de l'hypothèse que f définit une bijection sur chaque droite. Le seul automorphisme de \mathbf{R} étant l'identité (l'additivité permet de montrer facilement que σ est l'identité sur \mathbf{Q} , puis l'image d'un carré est un carré, celle d'un réel positif est un réel positif, donc σ est croissante, et on conclut par densité des rationnels), \vec{u} est linéaire, et f est affine.