Exercice 1. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions F, G d'un espace affine $\mathcal{E}$, et $\mathcal{H}$ le sous-espace affine qu'ils engendrent. Soient f, g, h leurs dimensions respectives.

a) Déterminer h en fonction de $\dim(F+G)$, selon que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide ou pas.

b) Supposons par exemple $f \leq g$. Démontrer que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ ssi $\dim(F+G) = g$.

c) Supposons de plus $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Déduire de a) et b) que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ si et seulement s'il existe un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, contenant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, de dimension $g+1$.
Solution.

a) *D'après le théorème d'incidence (cf cours), la direction H de $\mathcal{H}$ est $F+G$ si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide, $F + G + \mathbf{R}\overrightarrow{MN}$ si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide, pour n'importe quels $M \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{G}$ (et dans ce second cas, $\overrightarrow{MN} \notin F+G$). Donc $h = \dim(F+G)$ si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide, $h = \dim(F+G)+1$ si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide.*

b) *$\mathcal{F}//\mathcal{G} \Leftrightarrow F \subset G \Leftrightarrow F+G = G$, or $F+G \supset G$. Donc $\mathcal{F}//\mathcal{G} \Leftrightarrow \dim(F+G) = g$ (ou encore : $\dim(F+G) \leq g$).*

c) *D'après b) et le second cas de a), $\mathcal{F}//\mathcal{G} \Leftrightarrow h \leq g+1$.*

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, D_1, D_2 et D_3 des droites parallèles à un plan fixé, deux à deux non coplanaires. Soient u_1, u_2, u_3 des vecteurs directeurs de D_1, D_2 et D_3 respectivement, A_1, A_2, A_3 des points de D_1, D_2 et D_3 respectivement, et $w = \overrightarrow{A_2A_3}$. On se place dans le repère affine $(A_2, (u_2, u_3, w))$.

a) Donner une représentation paramétrique de D_2 et D_3.

b) En déduire que pour tout point A de coordonnées (x, y, z), si $z \neq 0, 1$ (en particulier si $A \in D_1$) alors il existe une (unique) droite Δ_A passant par A et coupant D_2 et D_3, et donner alors (en fonction de (x, y, z)) un vecteur directeur v_A de cette droite.

c) D'après b) on peut désormais supposer A_1, A_2, A_3 alignés. Soient alors $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $u_1 = au_2 + bu_3$ et $\overrightarrow{A_2A_1} = cw$. Donner une représentation paramétrique de D_1 puis montrer que lorsque A parcourt D_1, v_A varie dans un plan vectoriel fixe P.

d) Vérifier que $u_1 \notin P$. En déduire que lorsque A parcourt D_1, les droites Δ_A (toutes parallèles à P) sont deux à deux non coplanaires.
Solution.

a) *$D_2 = A_2 + \mathbf{R}u_2$ a pour représentation paramétrique $x = \lambda, y = 0, z = 0$. $D_3 = A_2 + w + \mathbf{R}u_3$ a pour représentation paramétrique $x = 0, y = \mu, z = 1$.*

b) *Les points de cordonnées (x, y, z), $(\lambda, 0, 0)$ et $(0, \mu, 1)$ sont alignés ssi les vecteurs de coordonnées $(x-\lambda, y, z)$ et $(-\lambda, \mu, 1)$ sont colinéaires, i.e. ssi $x - \lambda = -\lambda z$ et $y = \mu z$, donc ssi $x = \lambda(1-z)$ et $y = \mu z$. Si $z \neq 0, 1$, de tels λ, μ existent et sont uniques, d'où l'existence et l'unicité de Δ_A. On peut alors choisir pour v_A le vecteur de coordonnées $(-\lambda, \mu, 1) = (\frac{x}{z-1}, \frac{y}{z}, 1)$.*

c) *$D_1 = (A_2 + cw) + \mathbf{R}(au_2 + bu_3)$ a pour représentation paramétrique $x = ta, y = tb, z = c$. Pour $A \in D_1$ correspondant à une valeur t du paramètre, le vecteur v_A correspondant vaut $\frac{ta}{c-1}u_2 + \frac{tb}{c}u_3 + w = tw' + w$, où $w' = \frac{a}{c-1}u_2 + \frac{b}{c}u_3$, donc v_A appartient au plan vectoriel P engendré par w' et w.*

d) $u_1 \notin P$ *car* (u_1, w', w) *est libre car* $\begin{vmatrix} a & \frac{a}{c-1} & 0 \\ b & \frac{b}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{ab}{c(1-c)} \neq 0$, *donc pour* $A, A' \in D_1$ *distincts, la direction du sous-espace affine engendré par* Δ_A *et* Δ'_A*, qui contient* P *et* u_1*, est l'espace entier, donc ces deux droites sont non coplanaires.*

Exercice 3. Soit G le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$. Montrer que $a\overrightarrow{AA'} + b\overrightarrow{BB'} + c\overrightarrow{CC'} = 0$ ssi G est barycentre de $(A', a), (B'b), (C', c)$.
Solution. (Quitte à diviser a, b, c *par leur somme, on peut les supposer de somme* 1*, ce qui simplifie les notations) Soient* $G' = aA' + bB' + cC'$ *et* M *un point arbitraire, alors* $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{MG'} - \overrightarrow{MG} = (a\overrightarrow{MA'} + b\overrightarrow{MB'} + c\overrightarrow{MC'}) - (a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}) = a\overrightarrow{AA'} + b\overrightarrow{BB'} + c\overrightarrow{CC'}$.

Exercice 4. Soient A, B, C un triangle non applati et $\alpha\beta\gamma$ le triangle obtenu en menant par chacun des sommets A, B, C la parallèle à BC, CA, AB (α opposé à A, etc.)

a) Montrer que ces deux triangles ont même isobarycentre.

b) Montrer que $\overrightarrow{A\alpha} + \overrightarrow{B\beta} + \overrightarrow{C\gamma} = 0$ (appliquer l'exercice précédent).
Solution.

a) Cette figure est pleine de parallélogrames (dans un quadrilatère (M, N, P, Q)*, si* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ *– ou, ce qui est équivalent, si* $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ *– alors les côtés opposés sont évidemment parallèles deux à deux, mais c'est la réciproque – pour un quadrilatère non applati – qu'on utilise ici ; exercice subsidiaire : la (re-)démontrer). Deux d'entre eux donnent* $\overrightarrow{B\gamma} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{\alpha B}$*, donc* $B = \frac{\alpha+\gamma}{2}$*. De même,* $C = \frac{\alpha+\beta}{2}$ *et* $A = \frac{\beta+\gamma}{2}$*. Donc (par "associativité des barycentres")* $\frac{A+B+C}{3} = \frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{6} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$.

b) On applique l'exercice précédent pour $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ *et* $(A', B', C') = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Exercice 5. Soit ABC un triangle, on suppose que A' divise le segment BC dans le rapport 2 à 3 (i.e. $\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = 2/3$), que B' divise le segment AC dans le rapport $3/5$, et que (AA') et (BB') se coupent en G. Déterminer a et c tels que G soit le barycentre de $(A, a), (B, 1), (C, c)$.
Solution. (Vues les hypothèses, le triangle est non applati). Il existe un unique $s \in \mathbf{R}$ *tel que* $G = sA' + (1-s)A = s\frac{2C+B}{3} + (1-s)A$ *et un unique* $t \in \mathbf{R}$ *tel que* $G = tB' + (1-t)B = t\frac{3C+2A}{5} + (1-t)B$*. Par unicité des coordonnées barycentriques de* G *dans* (A, B, C)*,* $1 - s = 2t/5, s/3 = 1 - t, 2s/3 = 3t/5$*, d'où* $t = 10/13$ *(et* $s = 9/13$*), donc* $G = \frac{4A+3B+6C}{13}$ *est barycentre de* $(A, a), (B, 1), (C, c)$ *pour* $a = 4/3$ *et* $c = 6/3 = 2$.

Exercice 6. Soient A, B, C non alignés, et a, b, c trois réels non nuls de somme nulle. On désigne par A' le barycentre de $(B, b), (C, c)$, B' celui de $(C, c), (A, a)$, C' celui de $(A, a), (B, b)$. Montrer que les trois droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles.
Solution. Exprimons $\overrightarrow{AA'}$*,* $\overrightarrow{BB'}$ *et* $\overrightarrow{CC'}$ *en fonction par exemple de* $b, c, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *:* $\overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$, $\overrightarrow{BB'} = \frac{c\overrightarrow{BC}+a\overrightarrow{BA}}{c+a} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{-b}$, $\overrightarrow{CC'} = \frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{-c}$*, d'où* $a\overrightarrow{AA'} = b\overrightarrow{BB'} = c\overrightarrow{CC'}$.

Exercice 7. (extrait du premier devoir de 2005-2006) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ les sommets d'un tétraèdre. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des bipoints (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, D) et (D, B). On notera G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

a) Montrer que les droites IM, JN et KL sont concourantes en G.

b) Soit A' l'isobarycentre du triangle BCD. Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$. Que peut-on conclure?

c) Soient B' l'isobarycentre du triangle ACD, et C' l'isobarycentre du triangle ABD. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes. Quel est leur point d'intersection ?
Solution.

a) *Montrons par exemple que* $G \in [IM]$. $G = (1/4)A + (1/4)B + (1/4)C + (1/4)D$, $I = (1/2)A + (1/2)B$, $M = (1/2)C + (1/2)D$, *d'où par associativité du barycentre* $G = (1/2)I + (1/2)M$. *De même,* $G \in [J, N]$ *et* $G \in [K, L]$.

b) $A' = (1/3)B + (1/3)C + (1/3)D$ *et* $G = (1/4)A + (1/4)B + (1/4)C + (1/4)D$, *d'où par associativité du barycentre* $G = (1/4)A + (3/4)A'$ *(donc* $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = 0$*), donc* $G \in [A, A']$.

c) *De même,* $G \in [B, B']$ *et* $G \in [C, C']$ *donc les trois droites (et même les trois segments) contiennent* G.

Exercice 8. Soient $A_0, \ldots, A_p \in \mathcal{E}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall i \in [0, p], (\overrightarrow{A_iA_j})_{0 \leq j \leq p, j \neq i}$ est libre

(ii) $\exists i \in [0, p], (\overrightarrow{A_iA_j})_{0 \leq j \leq p, j \neq i}$ est libre

(iii) aucun des A_k n'est barycentre des autres.

(iv) pour tout barycentre des A_i, le $p + 1$-uplet des coefficients barycentriques est unique à proportionnalité près.
Solution. Puisque (i)⇒(ii) et (iv)⇒(iii) sont immédiats, prouvons (ii)⇒(iv) et (iii)⇒(i) (par contraposition).

(ii)⇒(iv) *Si* $\sum s_j A_j = \sum t_j A_j$ *avec* $\sum s_j = \sum t_j = 1$ *et au moins un indice* j *pour lequel* $s_j \neq t_j$ *(donc en fait, au moins deux), alors en posant* $\lambda_j = t_j - s_j$ *on trouve, pour tout* i, $\sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} = 0$ *et* $(\lambda_j)_{j \neq i}$ *non tous nuls.*

(iii)⇒(i) *Si pour un certain* i, $\sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} = 0$ *avec* $\lambda_k \neq 0$ *alors en posant* $s_j = -\lambda_j/\lambda_k$ *pour* $j \neq i, k$ *puis* $s_i = 1 - \sum_{j \neq i,k} s_j$, *on a* $\overrightarrow{A_iA_k} = \sum_{j \neq i,k} s_j \overrightarrow{A_iA_j} = \sum_{j \neq k} s_j \overrightarrow{A_iA_j}$ *et* $\sum_{j \neq k} s_j = 1$, *donc* $A_k = \sum_{j \neq k} s_j A_j$.

Exercice 9. (Théorème de Menelaüs) Soient $\mathcal{R} = (A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ et $B_0, \ldots, B_n$ $n + 1$ points quelconques.

a) On note $\gamma_{i,j}$ la i-ième coordonnée barycentrique de B_j dans $\mathcal{R}$. Montrer que $(B_0, \ldots, B_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ ssi $\det(\gamma) \neq 0$.

b) Dans le cas particulier $B_0 \in (A_0A_1), B_0 \neq A_1, \ldots, B_n \in (A_nA_0), B_n \neq A_0$, en déduire que $(B_0, \ldots, B_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ ssi $\frac{\overline{B_0A_0}}{\overline{B_0A_1}} \times \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_2}} \times \ldots \times \frac{\overline{B_nA_n}}{\overline{B_nA_0}} \neq 1$.
Solution.

a) $\det(\gamma)$ *est nul ssi l'une des colonnes de* γ, *disons la* k*-ième, est combinaison linéaire des autres, i.e. (en notant* γ_j *la* j*-ième colonne ssi il existe* $(\lambda_j)_{j \neq k}$ *tel que* $\gamma_k = \sum_{j \neq k} \lambda_j \gamma_j$. *Puisque chaque colonne est de somme 1, de tels* λ_j *vérifient automatiquement* $1 = \sum_{j \neq k} \lambda_j \times 1$. *Conclusion :* $\det(\gamma)$ *est nul ssi une colonne* γ_k *de* γ *est barycentre des autres, i.e. ssi un* B_k *est barycentre des autres* B_j, *i.e. (cf exercice précédent) ssi* $(B_0, \ldots, B_n)$ *n'est pas un repère affine.*

b) *Soient* $s_j \neq 0$ *tels que* $B_0 = s_0A_0 + (1 - s_0)A_1, \ldots, B_n = s_nA_n + (1 - s_n)A_0$. *Alors* $\frac{\overline{B_0A_0}}{\overline{B_0A_1}} \times \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_2}} \times \ldots \times \frac{\overline{B_nA_n}}{\overline{B_nA_0}} = \prod \frac{s_j - 1}{s_j}$ *et* $\det(\gamma) = (\prod s_j) + (-1)^n \prod_{j=0}^{n} (1 - s_j) = (\prod s_j) - \prod (s_j - 1)$, *d'où l'équivalence voulue.*

Exercice 10. (extrait du premier devoir de 2005-2006) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine, D_1, D_2, D_3 trois droites affines distinctes qui se coupent en un point $O \in \mathcal{E}$. Soient A, A' (resp. B, B' (resp. C, C'))

deux points distincts de $D_1 \setminus \{O\}$ (resp. $D_2 \setminus \{O\}$ (resp. $D_3 \setminus \{O\}$)). On suppose que BC et $B'C'$ se coupent en un point P, CA et $C'A'$ se coupent en un point Q, et AB et $A'B'$ se coupent en un point R.

a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ uniques tels que $\overrightarrow{OA} = (\alpha - 1)\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{OB} = (\beta - 1)\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{OC} = (\gamma - 1)\overrightarrow{CC'}$.

b) Montrer que β différent de γ, puis que γ différent de α et α différent de β. Déterminer (en fonction de α, β, γ) les coordonnées barycentriques de P dans le repère affine (B, C) de la droite affine BC, puis celles de Q dans le repère affine (C, A) et celles de R dans le repère affine (A, B).

c) En déduire que P, Q, R sont alignés. (Remarque : c'est une version faible du théorème de Desargues qui, sans supposer a priori D_1, D_2, D_3 concourantes, énonce qu'elles le sont ssi P, Q, R sont alignés).
Solution.

a) *$\overrightarrow{OA} = (\alpha - 1)\overrightarrow{AA'}$ est équivalent à $O = \alpha A + (1 - \alpha)A'$. Puisque $O \in (AA')$, un tel réel α existe et est unique (et différent de 0 et 1 puisque $O \neq A', A$). Idem pour β, γ.*

b) *Soit (puisque $P \in (B'C')$) $s \in \mathbf{R}$ tel que $P = sB' + (1 - s)C'$ (s est non nul car $P \neq C'$ car B, C, C' sont non alignés). Comme $B' = \frac{1}{1-\beta}O + \frac{-\beta}{1-\beta}B$ et $C' = \frac{1}{1-\gamma}O + \frac{-\gamma}{1-\gamma}C$, $P = (\frac{s}{1-\beta} + \frac{1-s}{1-\gamma})O + \frac{s\beta}{\beta-1}B + \frac{(1-s)\gamma}{\gamma-1}C$. Puisque $P \in (BC)$ on en déduit (par unicité des coordonnées barycentriques de P dans (O, B, C)) $\frac{s}{1-\beta} + \frac{1-s}{1-\gamma} = 0$, i.e. $\frac{1}{s} = \frac{\gamma-\beta}{1-\beta}$ (ce qui prouve au passage que $\beta \neq \gamma$), et il reste $P = \frac{s\beta}{\beta-1}B + \frac{(1-s)\gamma}{\gamma-1}C = \frac{\beta}{\beta-\gamma}B + \frac{\gamma}{\gamma-\beta}C$. De même, ($\gamma \neq \alpha$ et) $Q = \frac{\gamma}{\gamma-\alpha}C + \frac{\alpha}{\alpha-\gamma}A$, et ($\alpha \neq \beta$ et) $R = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}A + \frac{\beta}{\beta-\alpha}B$.*

c) *De b) on déduit facilement $\forall M \in \mathcal{E}, (\beta - \gamma)\overrightarrow{MP} + (\gamma - \alpha)\overrightarrow{MQ} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{MR} = 0$, donc $R = \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}P + \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}Q \in (PQ)$.*