Exercice 1. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions F, G d'un espace affine $\mathcal{E}$, et $\mathcal{H}$ le sous-espace affine qu'ils engendrent. Soient f, g, h leurs dimensions respectives.

a) Déterminer h en fonction de $\dim(F+G)$, selon que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide ou pas.

b) Supposons par exemple $f \leq g$. Démontrer que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ ssi $\dim(F+G) = g$.

c) Supposons de plus $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Déduire de a) et b) que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ si et seulement s'il existe un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, contenant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, de dimension $g+1$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, D_1, D_2 et D_3 des droites parallèles à un plan fixé, deux à deux non coplanaires. Soient u_1, u_2, u_3 des vecteurs directeurs de D_1, D_2 et D_3 respectivement, A_1, A_2, A_3 des points de D_1, D_2 et D_3 respectivement, et $w = \overrightarrow{A_2A_3}$. On se place dans le repère affine $(A_2, (u_2, u_3, w))$.

a) Donner une représentation paramétrique de D_2 et D_3.

b) En déduire que pour tout point A de coordonnées (x, y, z), si $z \neq 0, 1$ (en particulier si $A \in D_1$) alors il existe une (unique) droite Δ_A passant par A et coupant D_2 et D_3, et donner alors (en fonction de (x, y, z)) un vecteur directeur v_A de cette droite.

c) D'après b) on peut désormais supposer A_1, A_2, A_3 alignés. Soient alors $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $u_1 = au_2 + bu_3$ et $\overrightarrow{A_2A_1} = cw$. Donner une représentation paramétrique de D_1 puis montrer que lorsque A parcourt D_1, v_A varie dans un plan vectoriel fixe P.

d) Vérifier que $u_1 \notin P$. En déduire que lorsque A parcourt D_1, les droites Δ_A (toutes parallèles à P) sont deux à deux non coplanaires.

Exercice 3. Soit G le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$. Montrer que $a\overrightarrow{AA'} + b\overrightarrow{BB'} + c\overrightarrow{CC'} = 0$ ssi G est barycentre de $(A', a), (B'b), (C', c)$.

Exercice 4. Soient A, B, C un triangle non applati et $\alpha\beta\gamma$ le triangle obtenu en menant par chacun des sommets A, B, C la parallèle à BC, CA, AB (α opposé à A, etc.)

a) Montrer que ces deux triangles ont même isobarycentre.

b) Montrer que $\overrightarrow{A\alpha} + \overrightarrow{B\beta} + \overrightarrow{C\gamma} = 0$ (appliquer l'exercice précédent).

Exercice 5. Soit ABC un triangle, on suppose que A' divise le segment BC dans le rapport 2 à 3 (i.e. $\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = 2/3$), que B' divise le segment AC dans le rapport $3/5$, et que (AA') et (BB') se coupent en G. Déterminer a et c tels que G soit le barycentre de $(A, a), (B, 1), (C, c)$.

Exercice 6. Soient A, B, C non alignés, et a, b, c trois réels non nuls de somme nulle. On désigne par A' le barycentre de $(B, b), (C, c)$, B' celui de $(C, c), (A, a)$, C' celui de $(A, a), (B, b)$. Montrer que les trois droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles.

Exercice 7. (extrait du premier devoir de 2005-2006) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ les sommets d'un tétraèdre. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des bipoints (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, D) et (D, B). On notera G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

a) Montrer que les droites IM, JN et KL sont concourantes en G.

b) Soit A' l'isobarycentre du triangle BCD. Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$. Que peut-on conclure?

c) Soient B' l'isobarycentre du triangle ACD, et C' l'isobarycentre du triangle ABD. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes. Quel est leur point d'intersection ?

Exercice 8. Soient $A_0, \ldots, A_p \in \mathcal{E}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall i \in [0,p], (\overrightarrow{A_iA_j})_{0 \leq j \leq p, j \neq i}$ est libre

(ii) $\exists i \in [0,p], (\overrightarrow{A_iA_j})_{0 \leq j \leq p, j \neq i}$ est libre

(iii) aucun des A_k n'est barycentre des autres.

(iv) pour tout barycentre des A_i, le $p+1$-uplet des coefficients barycentriques est unique à proportionnalité près.

Exercice 9. (Théorème de Menelaüs) Soient $\mathcal{R} = (A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ et $B_0, \ldots, B_n$ $n+1$ points quelconques.

a) On note $\gamma_{i,j}$ la i-ième coordonnée barycentrique de B_j dans $\mathcal{R}$. Montrer que $(B_0, \ldots, B_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ ssi $\det(\gamma) \neq 0$.

b) Dans le cas particulier $B_0 \in (A_0A_1), B_0 \neq A_1, \ldots, B_n \in (A_nA_0), B_n \neq A_0$, en déduire que $(B_0, \ldots, B_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ ssi $\frac{\overline{B_0A_0}}{\overline{B_0A_1}} \times \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_2}} \times \ldots \times \frac{\overline{B_nA_n}}{\overline{B_nA_0}} \neq 1$.

Exercice 10. (extrait du premier devoir de 2005-2006) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine, D_1, D_2, D_3 trois droites affines distinctes qui se coupent en un point $O \in \mathcal{E}$. Soient A, A' (resp. B, B' (resp. C, C')) deux points distincts de $D_1 \setminus \{O\}$ (resp. $D_2 \setminus \{O\}$ (resp. $D_3 \setminus \{O\}$)). On suppose que BC et $B'C'$ se coupent en un point P, CA et $C'A'$ se coupent en un point Q, et AB et $A'B'$ se coupent en un point R.

a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ uniques tels que $\overrightarrow{OA} = (\alpha - 1)\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{OB} = (\beta - 1)\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{OC} = (\gamma - 1)\overrightarrow{CC'}$.

b) Montrer que β différent de γ, puis que γ différent de α et α différent de β. Déterminer (en fonction de α, β, γ) les coordonnées barycentriques de P dans le repère affine (B, C) de la droite affine BC, puis celles de Q dans le repère affine (C, A) et celles de R dans le repère affine (A, B).

c) En déduire que P, Q, R sont alignés. (Remarque : c'est une version faible du théorème de Desargues qui, sans supposer a priori D_1, D_2, D_3 concourantes, énonce qu'elles le sont ssi P, Q, R sont alignés).