Exercice 1. Dans un espace euclidien, montrer que deux endomorphismes autoadjoints qui commutent admettent une base othonormée commune de diagonalisation.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien, et $(a_1, \dots, a_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de Gram la matrice $G(a_1, \dots, a_p)$ dont les coefficients sont $(< a_i, a_j >)_{i,j}$. Montrer que le rang de la matrice est égal au rang de la famille. Si on suppose de plus que la famille est libre et engendre un sous-espace vectoriel F de E, montrer pour tout $x \in E$ l'identité :

$$d(x,F)^2 = \frac{\det G(a_1, \dots, a_p, x)}{\det G(a_1, \dots, a_p)}.$$

Exercice 3. On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^2$. Soit $\mathcal{R} = (O, (e_1, e_2))$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$.

- a) Soient A un point de coordonnées $(2, -1)$ dans $\mathcal{R}$, et $u \in \mathbf{R}^2$ un vecteur de coordonnées $(1, -2)$ dans la base (e_1, e_2) de $\mathbf{R}^2$.
  - i) Donner une représentation paramétrique de la droite affine $\mathcal{D}$ qui passe par A et qui est dirigée par u.
  - ii) Déterminer une équation de $\mathcal{D}$.
- b) Soient $m \in \mathbf{R}$ et $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites affines de $\mathcal{E}$ d'équation :

$$\begin{aligned} 2mx + (m^2-1)y + m^3 - 11 = 0 \qquad & (\mathcal{D}), \\ (m^2+9)x + 8my + 2m + 1 = 0 \qquad & (\mathcal{D}'). \end{aligned}$$

  Déterminer les réels m tels que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient parallèles.

Exercice 4. On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^3$. Soit $\mathcal{R} = (O, (e_1, e_2, e_3))$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(2, 5, 3)$ et $(3, -1, 4)$ dans $\mathcal{R}$. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées $(1, 0, -1)$ et $(6, 1, 0)$ dans la base (e_1, e_2, e_3).

- a) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le milieu M de (A, B) et dont la direction contient les vecteurs u et v.
- b) Soient $\mathcal{D}$ la droite affine de $\mathcal{E}$ dont une représentation paramétrique est :

$$x = 2 + \tau, y = 5 - 4\tau, z = 3 - 6\tau.$$

  Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$.

Exercice 5. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{E}$, déterminer la nature de la composée de :

- a) deux symétries orthogonales par rapport à des droites (selon que ces deux droites affines sont parallèles ou sécantes),
- b) deux rotations,
- c) une translation et une rotation.

Exercice 6. Dans un plan affine euclidien, soit deux isométries ayant chacune un point fixe mais n'ayant pas de point fixe commun. En considérant successivement les cas suivants, montrer qu'il y a une translation dans le sous-groupe engendré par ces isométries :

- deux symétries orthogonales,
- deux rotations d'angles opposés modulo 2π,
- une rotation et une symétrie orthogonale,
- deux rotations quelconques.

En déduire que si un sous-groupe H du groupe des isométries du plan est tel que chacun de ses éléments admet un point fixe, alors ils admettent un point fixe commun.

Exercice 7. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, soit D_1 et D_2 deux droites non parallèles, dirigées respectivement par e_1 et e_2, unitaires. Quelle est la nature de $P = D_1 + \mathrm{vect}(e_1, e_2)$? Montrer que le projeté orthogonal de D_2 sur P est une droite sécante de D_1, et soit A le point d'intersection. Montrer qu'il existe une droite Δ passant par A orthogonale à D_1 et D_2, et que c'est l'unique perpendiculaire commune. Deux droites quelconques admettent-elles une perpendiculaire commune ? unicité ?

Exercice 8. On reprend les notations de l'exercice 7, en supposant cette fois D_1 et D_2 non coplanaires. Soit O le milieu du segment $[D_1 \cap \Delta, D_2 \cap \Delta]$. Soit G le groupe des isométries laissant $D_1 \cup D_2$ fixe. Montrer que Δ et O sont globalement fixés par G. Montrer que G agit sur l'ensemble $\{\pm e_1, \pm e_2\}$. En déduire 8 écritures matricielles possibles des éléments de G dans la base (e_1, e_2, e_3), où e_3 est un vecteur directeur unitaire de Δ. Montrer que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou au groupe diédral d'ordre 8 suivant que e_1 et e_2 sont orthogonaux ou non.

Exercice 9. Dans l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^2$ on considère le triangle T_1 de sommets $A_1 = (-1, 0)$, $A_2 = (1, 1)$, $A_3 = (1, -1)$ et le triangle T_2 de sommets $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (1, 2)$, $B_3 = (-1, 2)$.

- a) Dessiner T_1 et T_2.
- b) Pourquoi existe-t-il une unique application affine f telle que $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2$, $f(A_3) = B_3$, et une unique application affine g telle que $g(A_1) = B_2$, $g(A_2) = B_1$, $g(A_3) = B_3$?
- c) Calculer $f((0, 0))$ et $g((0, 0))$.
- d) Montrer que f s'écrit $u \circ t$ avec u "linéaire" (plus exactement : u affine fixant $(0, 0)$) et t translation (déterminer t et u). Une telle décomposition est-elle unique ?
- e) f est-elle une isométrie ?
- f) g est-elle une isométrie ?

Exercice 10. Soit ABC un triangle non plat, et AA_1B_1B et ACC_2A_2 deux carrés bâtis sur ses côtés (les points sont énumérés dans le sens direct). Soit A' l'unique point tel que $AA_2A'A_1$ soit un parallélogramme. Montrer que (AA') et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 11. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 2 ou 3.

- a) Si t est une translation et r une rotation, démontrer que $t \circ r \circ t^{-1}$ est une rotation, dont on précisera les caractéristiques (angle et centre en dimension 2, angle et axe en dimension 3) en fonction de celles de r et du vecteur de la translation t.
- b) En déduire que pour toute rotation r et toute translation T, il existe une translation T' et une rotation r' (à préciser) telles que $r \circ T = T' \circ r'$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 12. Démontrer que l'application $\varphi : \mathbf{GA}(\mathcal{E}) \to \mathbf{GL}(E)$ définie par $f \longmapsto \overrightarrow{f}$ est un homomorphisme de groupes surjectif et déterminer son noyau. Si $f \in \mathbf{GA}(\mathcal{E})$ et si t est une translation, quelle est la nature de $f \circ t \circ f^{-1}$?