Exercice 1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, $O \in \mathcal{E}$ et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine. On cherche à décomposer f sous la forme $t_1 \circ u_1$ ou $u_2 \circ t_2$ avec t_i translation et u_i application affine fixant O.
a. Montrer que u_i (si elle existe) est unique, et que u_1, u_2 (si elles existent) sont égales.
b. Montrer que le problème équivaut à trouver des translations t_i telles que $(t_1^{-1} \circ f)(O) = O$ et $(f \circ t_2^{-1})(O) = O$.
c. Démontrer que t_1 existe et est unique (et déterminer son vecteur).
d. Démontrer que des t_2 existent si et seulement si $O \in \mathrm{Im}(f)$ (et déterminer leurs vecteurs).

Exercice 2. On note $\mathbf{GA}_O(\mathcal{E})$ le sous-groupe des éléments de $\mathbf{GA}(\mathcal{E})$ qui fixent le point O. Montrer que l'application suivante est bien définie (c'est-à-dire à valeurs dans $T_{\mathcal{E}}$, le sous-groupe des translations) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{GA}_O(\mathcal{E}) \times T_{\mathcal{E}} & \to & T_{\mathcal{E}} \\ (u,t) & \mapsto & u \circ t \circ u^{-1} \end{array}$$

et fournit une action de $\mathbf{GA}_O(\mathcal{E})$ sur $T_{\mathcal{E}}$. Décrire (le vecteur de) la translation $u \circ t \circ u^{-1}$ en fonction de t et u, et constater que l'action est indépendante du point O (on a donc en fait une action de $\mathbf{GL}(E)$ sur $T_{\mathcal{E}}$).

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, et O un point de $\mathcal{E}$.
a. Montrer qu'il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ dirigé par F et passant par O.
b. Soit F' un supplémentaire de F dans E, $\mathcal{F}'$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par F' et passant par O, et $\overrightarrow{p} \in L(E)$ la projection de F parallèlement à F'. Montrer qu'il existe une unique application affine p_O fixant O, dont l'application affine associée est $\overrightarrow{p}$.
c. Soit O' un autre point de $\mathcal{E}$ et $p_{O'}$ la projection affine obtenue à partir de O'. Montrer la relation $p_O = t^{-1} \circ p_{O'} \circ t$, où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

Exercice 4. Soit $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $n+1$ points dans un espace affine de dimension n, tels que la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ soit une base de l'espace vectoriel sous-jacent. Soit $B_0, \ldots, B_n$ $n+1$ points quelconques dans un espace affine (éventuellement distinct de celui de départ). Montrer qu'il existe une unique application affine f telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i.

Exercice 5. Montrer que dans un espace affine de dimension 3 une droite et un plan (affines) peuvent, soit s'éviter (ils sont parallèles), soit s'intercepter en un unique point, soit être inclus l'un dans l'autre (la droite dans le plan).

Exercice 6. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même telle que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, on ait

$$||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{f(A)f(B)}||.$$

Montrer que f est une isométrie affine.