Exercice 1. *Dans un espace euclidien, montrer que deux endomorphismes autoadjoints qui commutent admettent une base othonormée commune de diagonalisation.*

Soient f, g endomorphismes autoadjoints de E, qui commutent. Pour chaque valeur propre λ de f le sous-espace propre correspondant E_λ est stable par g (vous devez savoir le vérifier) et la restriction de g à ce sous-espace est encore autoadjointe (idem), donc E_λ admet une b.o.n. B_λ propre pour $g_{|E_\lambda}$. Les E_λ sont orthogonaux deux à deux et leur somme directe est E, donc $B := \cup_\lambda E_\lambda$ est une b.o.n. de E, propre pour f et g par construction. Remarques : idem pour toute famille d'endomorphismes autoadjoints qui commutent 2 à 2 ; on démontre de même l'énoncé non euclidien " deux endomorphismes diagonalisables (ou plus) qui commutent admettent une base propre commune".

Exercice 2. *Soit E un espace euclidien, et $(a_1, \dots, a_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de Gram la matrice $G(a_1, \dots, a_p)$ dont les coefficients sont $(< a_i, a_j >)_{i,j}$. Montrer que le rang de la matrice est égal au rang de la famille. Si on suppose de plus que la famille est libre et engendre un sous-espace vectoriel F de E, montrer pour tout $x \in E$ l'identité :*

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(a_1, \dots, a_p, x)}{\det G(a_1, \dots, a_p)}.$$

Soit r le rang de cette famille, le rang de la matrice de Gram associée est au plus r (car $r + 1$ colonnes quelconques sont liées). Il suffit donc de prouver que si r vecteurs forment une famille libre, leur matrice de Gram a un déterminant non nul. On va montrer mieux grâce à la formule de la question suivante : ce déterminant est en fait > 0 puisque c'est le produit des carrés des distances de chacun de ces r vecteurs au sous-espace engendré par les précédents. Soit $y = \sum \alpha_i a_i$ le projeté orthogonal de x sur le s.e.v. F engendré par $a_1, \dots, a_p$, alors $G(a_1, \dots, a_p, x) = \begin{pmatrix} G(a_1, \dots, a_p) & < a_i, y > \\ < y, a_j > & \|x\|^2 \end{pmatrix}$ donc (en retranchant à la dernière colonne la combinaison linéaire des précédentes par les α_j) $\det G(a_1, \dots, a_p, x) = \det \begin{pmatrix} G(a_1, \dots, a_p) & 0 \\ < y, a_j > & \|x\|^2 - \|y\|^2 \end{pmatrix} = \det G(a_1, \dots, a_p) d(x, F)^2$.

Exercice 3. *On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^2$. Soit $\mathcal{R} = (O, (e_1, e_2))$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$.*

- *a) Soient A un point de coordonnées $(2, -1)$ dans $\mathcal{R}$, et $u \in \mathbf{R}^2$ un vecteur de coordonnées $(1, -2)$ dans la base (e_1, e_2) de $\mathbf{R}^2$.*
  - *i) Donner une représentation paramétrique de la droite affine $\mathcal{D}$ qui passe par A et qui est dirigée par u.*
  - *ii) Déterminer une équation de $\mathcal{D}$.*
- *b) Soient $m \in \mathbf{R}$ et $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites affines de $\mathcal{E}$ d'équation :*

$$\begin{aligned} 2mx + (m^2 - 1)y + m^3 - 11 = 0 \qquad & (\mathcal{D}), \\ (m^2 + 9)x + 8my + 2m + 1 = 0 \qquad & (\mathcal{D}'). \end{aligned}$$

Déterminer les réels m tels que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient parallèles.

La droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points de la forme $A + \lambda u$, pour λ réel (ceci est déjà une représentation paramétrique). Une représentation paramétrique en coordonnées est alors $\begin{pmatrix} 2 + \lambda \\ -1 - 2\lambda \end{pmatrix}$. Une équation est alors $2x + y = 3$ (car $2x + y$ est une forme linéaire qui s'annule en le vecteur directeur u, 3 est sa valeur en A).

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent respectivement comme vecteurs directeurs : $\begin{pmatrix} m^2-1 \\ -2m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -8m \\ m^2+9 \end{pmatrix}$, tous deux non nuls pour tout m. Elles sont donc parallèles si et seulement si $0 = \begin{vmatrix} m^2-1 & -8m \\ -2m & m^2+9 \end{vmatrix} = m^4 - 8m^2 - 9 = (m^2+1)(m^2-9)$ c'est-à-dire si et seulement si $m = \pm 3$.

Exercice 4. *On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^3$. Soit $\mathcal{R} = (O, (e_1, e_2, e_3))$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(2, 5, 3)$ et $(3, -1, 4)$ dans $\mathcal{R}$. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées $(1, 0, -1)$ et $(6, 1, 0)$ dans la base (e_1, e_2, e_3).*

- *a) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le milieu M de (A, B) et dont la direction contient les vecteurs u et v.*
- *b) Soient $\mathcal{D}$ la droite affine de $\mathcal{E}$ dont une représentation paramétrique est :*

$$x = 2 + \tau, y = 5 - 4\tau, z = 3 - 6\tau.$$

Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$.

Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, ils engendrent donc un hyperplan vectoriel, qui admet pour équation une forme linéaire $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ En remplaçant (x, y, z) par les coordonnées de u puis celles de v, on trouve $\alpha = \gamma$, puis $\beta = -6\alpha$, $x - 6y + z = 0$ est donc une équation de ce plan vectoriel. En évaluant aux coordonnées $(5/2, 2, 7/2)$ du milieu de A et B, on trouve l'équation $x - 6y + z = -6$ pour le plan affine $\mathcal{P}$.

Pour trouver l'intersection, on injecte la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ dans l'équation de $\mathcal{P}$. On trouve l'équation linéaire en τ :

$$2 + \tau - 6(5 - 4\tau) + 3 - 6\tau,$$

qui se résout en $\tau = 1$. L'intersection est donc le point de coordonnées $(3, 1, -3)$.

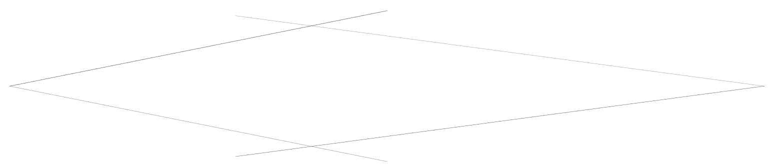
Exercice 5. *Dans un plan affine euclidien $\mathcal{E}$, déterminer la nature de la composée de :*

- *a) deux symétries orthogonales par rapport à des droites (selon que ces deux droites affines sont parallèles ou sécantes),*
- *b) deux rotations,*
- *c) une translation et une rotation.*

On utilise librement le résultat de l'exercice 12.

Le cas de la composée de deux symétries par rapport à deux droites sécantes a déjà été vu (exercice 7, feuille 1) : on obtient une rotation d'angle le double de l'angle entre les droites. Deux symétries par rapport à des droites parallèles se composent en une translation de vecteur orthogonal à ces droites, de norme le double de la distance, et allant vers le demi-plan délimité par la première droite, contenant la deuxième. Cela peut se vérifier par un calcul élémentaire en choisissant des coordonnées adaptées, ou se déduire de l'exercice 12 : les deux symétries ont même partie linéaire, qui est une involution, donc leur composée a une partie linéaire triviale, c'est donc une translation, et son vecteur se trouve en regardant l'image d'un point sur la première droite.

La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre, dont l'angle est la somme des angles (modulo 2π si on veut). Si les centres sont distincts, ceci s'applique à la partie vectorielle. Si cette partie vectorielle est triviale (c'est-à-dire si la somme des angles est triviale modulo 2π), on obtient une translation, donc le vecteur est donné par l'image du centre de la première rotation par la deuxième. Si elle n'est pas triviale, on obtient une rotation, dont le centre est donné par la construction suivante :



Si le point d'intersection de gauche est le centre de la première rotation, que l'angle direct (refaites le dessin en faisant varier cet angle direct. Notamment s'il est $> \pi$.) entre les deux demi-droites qui s'y coupent est l'angle de cette même rotation (et de même pour le point d'intersection à droite), alors, on voit que le point d'intersection en bas est fixe par la composée des deux rotations, c'est donc son centre.

La composée d'une translation t de vecteur u et d'une rotation r de centre O et d'angle $\theta \neq 0$ est une rotation d'angle θ. Le centre O' de $t \circ r$ vérifie $O' = (t \circ r)(O') = r(O') + u$ i.e. $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{OO'}) + u$ i.e. $O' = O + (id - \overrightarrow{r})^{-1}(u)$. Par la même méthode (ou en appliquant ce qui précède à $t^{-1} \circ r^{-1}$) le centre de $r \circ t$ est $O + (\overrightarrow{r}^{-1} - id)^{-1}(u)$.

Exercice 6. *Dans un plan affine euclidien, soit deux isométries ayant chacune un point fixe mais n'ayant pas de point fixe commun. En considérant successivement les cas suivants, montrer qu'il y a une translation non triviale dans le sous-groupe engendré par ces isométries :*
- *deux réflexions,*
- *deux rotations d'angles opposés modulo 2π,*
- *une rotation et une réflexion,*
- *deux rotations quelconques.*

En déduire que si un sous-groupe H du groupe des isométries du plan est tel que chacun de ses éléments admet un point fixe, alors ils admettent un point fixe commun.

Les cas 1 et 2 sont traités dans l'exercice précédent (les deux symétries orthogonales sont par rapport à des droites strictement parallèles puisqu'elles n'ont pas de point fixe commun).

Le cas 3 se déduit du cas 2 : si r est une rotation non triviale et s une réflexion alors $\overrightarrow{s \circ r}$ est une symétrie (vectorielle) donc $\overrightarrow{s \circ r \circ s} = \overrightarrow{r}^{-1}$ donc r et $s \circ r \circ s$ sont deux rotations d'angles opposés (et, comme r, s, sans point fixe commun, sinon le centre O de r vérifierait $s(r(s(O)) = O$ donc $s(O)$ fixe par r donc $s(O) = O$).

Le cas 4 aussi : si r_1, r_2 sont deux rotations d'angles non nuls et non opposés alors $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$ sont deux rotations de même angle (la somme des angles de r_1 et r_2) et, comme r_1, r_2, sans point fixe commun, sinon elles seraient égales donc le centre O de r_1 vérifierait (par le même raisonnement que ci-dessus) $r_2(O) = O$. (En fait, $r_2 \circ r_1$ est une rotation dont le centre est le point d'intersection du bas dans la figure de l'exercice 5, et

$r_1 \circ r_2$ est aussi une rotation, dont le centre est le point d'intersection du haut).

Alternativement, le cas 3 se prouve directement : soient r une rotation non triviale et s une réflexion. On considère la droite parallèle à l'axe de s passant par le centre de r, et on note s' la réflexion par rapport à cette droite. Alors il existe une réflexion s_1, par rapport à une droite passant par le centre de r telle que $r = s' \circ s_1$ (voir exercice 7 de la feuille 1). Alors $s \circ r = s \circ s' \circ s_1$, et $s \circ s'$ est une translation t d'après ce qui précède. La partie vectorielle de $s \circ r$ est donc la réflexion $\overrightarrow{s_1}$, la partie vectorielle de $(s \circ r)^2$ est donc triviale, et c'est une translation de vecteur $2(\overrightarrow{s_1} + id)(\overrightarrow{u})$, où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur d'origine O, et d'extrémité son projeté orthogonal sur l'axe de s (le vecteur $2(\overrightarrow{s_1} + id)(\overrightarrow{u})$ est non trivial, car $\overrightarrow{u}$ n'est pas orthogonal à la direction de s_1, car cette direction n'est pas parallèle à celle de s et s', car r n'est pas triviale).

Soit enfin H un sous-groupe vérifiant les hypothèses. D'après ce qui précède, deux éléments quelconques de H ont toujours un point fixe commun. Si H contient une rotation non triviale, son centre est donc fixe par tout élément de H. Sinon, $H = \{id, s\}$ où s est une réflexion, et les (deux) éléments de H admettent une droite de points fixes communs.

Exercice 7. *Dans un espace affine euclidien de dimension 3, soit D_1 et D_2 deux droites non parallèles, dirigées respectivement par e_1 et e_2, unitaires. Quelle est la nature de $P = D_1 + \mathrm{vect}(e_1, e_2)$? Montrer que le projeté orthogonal de D_2 sur P est une droite sécante de D_1, et soit A le point d'intersection. Montrer qu'il existe une droite Δ passant par A orthogonale à D_1 et D_2, et que c'est l'unique perpendiculaire commune. Deux droites quelconques admettent-elles une perpendiculaire commune ? unicité ?*

P est un plan affine dirigé par $\mathrm{vect}(e_1, e_2)$, contenant D_1, et parallèle à D_2. Pour tout point M de D_2, le projeté orthogonal de $D_2 = M + \mathrm{vect}(e_2)$ sur P est la droite $p(D_2) = p(M) + \mathrm{vect}(e_2)$, par linéarité. Dans le plan P, les deux droites D_1 et $p(D_2)$ ont des vecteurs directeurs non colinéaires, elles sont non parallèles donc sécantes. Soit A le point d'intersection. Alors A admet un antécédent B dans D_2 pour la projection orthogonale sur P. La droite $(AB) = (Bp(B))$ est donc perpendiculaire au plan de projection, donc perpendiculaire (c'est-à-dire orthogonale, propriété linéaire euclidienne et sécante, propriété purement affine) à D_1 et à $p(D_2)$, puis à D_2.

Toute perpendiculaire commune à D_1 et D_2 est une perpendiculaire au plan P, donc sa direction est définie de manière unique. Si M est son point d'intersection avec D_2, alors $p(M)$ est son unique point d'intersection avec P, et doit donc appartenir à $D_1 \cap p(D_2)$, c'est-à-dire être A. Ainsi toute perpendiculaire commune doit passer par A, d'où l'unicité.

Dans le cas de deux droites parallèles, toute perpendiculaire commune doit être coplanaire à ces droites, et toute perpendiculaire à l'une respectant cette coplanarité est perpendiculaire à l'autre. D'où l'existence, en revanche, il n'y a pas d'unicité, l'ensemble des perpendiculaires est même en bijection avec, mettons, la première droite.

Exercice 8. *On reprend les notations de l'exercice 7, en supposant cette fois D_1 et D_2 non coplanaires. Soit O le milieu du segment $[D_1 \cap \Delta, D_2 \cap \Delta]$. Soit G le groupe des isométries laissant $D_1 \cup D_2$ fixe. Montrer que Δ et O sont globalement fixés par G. Montrer que G agit sur l'ensemble $\{\pm e_1, \pm e_2\}$. En déduire 8 écritures matricielles possibles des éléments de G dans la base (e_1, e_2, e_3), où e_3 est un vecteur directeur unitaire de Δ.*

Montrer que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou au groupe diédral d'ordre 8 suivant que e_1 et e_2 sont orthogonaux ou non.

Un élément de G soit laisse chacune des droites D_1 et D_2 globalement fixe, soit les intervertit. Dans les deux cas leur unique perpendiculaire commune est laissée fixe (préservation de la propriété d'orthogonalité, et de la propriété d'incidence par une isométrie affine). Les points d'intersection A et B sont aussi soit fixés, soit intervertis, et leur milieu O est fixé. Le sous-groupe G est donc inclus dans le stabilisateur (sous-groupe de $\mathcal{IS}(\mathcal{E})$) de O, et s'identifie donc à un sous-groupe de $O_3(\mathbf{R})$.

En tant que vecteur directeur normé de D_1, e_1 est envoyé, par la partie vectorielle $\overrightarrow{g}$ d'un élément $g \in G$, sur un vecteur directeur normé de D_1 ou de D_2, c'est-à-dire sur $\pm e_1$ ou sur $\pm e_2$. On a évidemment $\overrightarrow{g}(-e_1) = -\overrightarrow{g}(e_1)$. De même pour e_2, et comme $\overrightarrow{g}$ est un isomorphisme, il est en fait envoyé sur un des deux, parmi ces quatre éléments, non colinéaire à $\overrightarrow{g}(e_1)$. On en déduit que G agit par permutation sur $\{\pm e_1, \pm e_2\}$. Par orthogonalité, (la partie vectorielle) de tout élément de G agit sur le vecteur e_3 (vecteur directeur de $\mathrm{vect}(e_1, e_2)^\perp$), en conservant la norme, donc soit comme l'identité, soit par multiplication par un scalaire ± 1. De plus, e_3 ne peut être fixé que par un élément qui laisse chacune des droites D_1 et D_2 globalement fixes. Les écritures matricielles possibles sont alors :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_{2,3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'identité $(g(e_1), g(e_2)) = (e_1, e_2)$ implique, dans les cas des deux représentations matricielles au centre de chaque ligne, l'identité $2(e_1, e_2) = 0$. Ainsi, si ce produit scalaire est non nul , le groupe G est constitué de l'identité, du demi-tour d'axe Δ (D_Δ), et des deux demi-tours (D_B et $D_{B'}$) d'axes respectifs les deux bissectrices des projetés de D_1 et D_2 dans le plan affine $O + \mathrm{vect}(e_1, e_2)$ (qui forment un groupe isomorphe à $Z/2Z \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$). Si ce produit scalaire est nul, on peut ajouter les réflexions $S_{1,3}$ et $S_{2,3}$ par rapport aux plans $O + \mathrm{vect}(e_1, e_3)$ et $O + \mathrm{vect}(e_2, e_3)$. On a aussi les symétries rotations M_1 et M_2, dont les décompositions canoniques comme symétries rotations font apparaître la réflexion de plan $O + \mathrm{vect}(e_1, e_2)$, et les rotations de droite Δ et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$, qui ne sont pas dans G. On a par exemple les relations suivantes :

$$M_1^2 = M_2^2 = D_\Delta,\ S_{2,3} M_1 S_{2,3} = M_2 = M_1^{-1}.$$

On reconnaît le groupe diédral avec la présentation $< M_1, S_{2,3} | M_1^4 = S_{2,3}^2 = M_1 S_{2,3} M_1 S_{2,3} >$, et l'ordre 8. (On peut aussi s'arrêter plus tôt dans les calculs en utilisant que le groupe diédral est l'unique groupe d'ordre 8 non commutatif admettant $\mathbf{Z}/2Z \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ comme sous-groupe).

Exercice 9. *Dans l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^2$ on considère le triangle T_1 de sommets $A_1 = (-1, 0)$, $A_2 = (1, 1)$, $A_3 = (1, -1)$ et le triangle T_2 de sommets $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (1, 2)$, $B_3 = (-1, 2)$.*

– *a) Dessiner T_1 et T_2.*

- *b) Pourquoi existe-t-il une unique application affine f telle que $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2$, $f(A_3) = B_3$, et une unique application affine g telle que $g(A_1) = B_2$, $g(A_2) = B_1$, $g(A_3) = B_3$?*
- *c) Calculer $f((0,0))$ et $g((0,0))$.*
- *d) Montrer que f s'écrit $u \circ t$ avec u "linéaire" (plus exactement : u affine fixant $(0,0)$) et t translation (déterminer t et u). Une telle décomposition est-elle unique ?*
- *e) f est-elle une isométrie ?*
- *f) g est-elle une isométrie ?*

On calcule $\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B_1B_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Il existe une unique application linéaire $\overrightarrow{f}$ qui envoie la base $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$ sur la base $(\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1B_3})$, et l'application affine f est uniquement définie comme $f(M) = B_1 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_1M})$. De même pour g.

On trouve $f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $g(0,0) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. On prend $u = \overrightarrow{f}$ et t translation de vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$. Dans la base canonique $\overrightarrow{f} = u$ admet pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui est une matrice d'isométrie (réflexion par rapport à la première bissectrice), donc f est une isométrie. En revanche, g n'est pas une isométrie (le vecteur $\overrightarrow{A_1A_3}$, de norme $\sqrt{5}$, est envoyé par $\overrightarrow{g}$ sur le vecteur $\overrightarrow{B_2B_3}$ de norme 2).

Exercice 10. *Soit ABC un triangle non plat, et AA_1B_1B et ACC_2A_2 deux carrés bâtis sur ses côtés (les points sont énumérés dans le sens direct). Soit A' l'unique point tel que $AA_2A'A_1$ soit un parallélogramme. Montrer que (AA') et (BC) sont perpendiculaires.*

Soit la r rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a :

$$r(\overrightarrow{AA'}) = r(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_2}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB},$$

et on en déduit le résultat.

Exercice 11. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 2 ou 3.*
- *a) Si t est une translation et r une rotation, démontrer que $t \circ r \circ t^{-1}$ est une rotation, dont on précisera les caractéristiques (angle et centre en dimension 2, angle et axe en dimension 3) en fonction de celles de r et du vecteur de la translation t.*
- *b) En déduire que pour toute rotation r et toute translation T, il existe une translation T' et une rotation r' (à préciser) telles que $r \circ T = T' \circ r'$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?*

Par l'exercice 12, on a bien que $t \circ r \circ t^{-1}$ est une rotation, de même angle que r. La variété fixe est $t^{-1}(V)$, où V est celle de r.

Prendre $T' = T$ et $r' = T^{-1} \circ r \circ T$. Le résultat peut se déduire en partie de l'exercice 12, mais surtout, le fait que $r \circ T$ puisse se mettre sous la forme $T' \circ r'$ avec T' translation et r' fixant un certain O (qu'on peut choisir) se déduit de l'exercice 1 de la feuille "2bis" (comme $\overrightarrow{r'}$ est une rotation vectorielle, r' est alors une rotation affine, même en dimension 3 puisque r' fixe (au moins) un point).

Exercice 12. *Démontrer que l'application* $\varphi : \mathbf{GA}(\mathcal{E}) \to \mathbf{GL}(E)$ *définie par* $f \longmapsto \overrightarrow{f}$ *est un homomorphisme de groupes surjectif et déterminer son noyau. Si* $f \in \mathbf{GA}(\mathcal{E})$ *et si* t *est une translation, quelle est la nature de* $f \circ t \circ f^{-1}$ *?*

On fixe un point O dans l'espace affine, alors pour tout point M :

$$f_1 \circ f_2(M) = f_1(f_2(O) + \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{OM})) = f_1 \circ f_2(O) + \overrightarrow{f_1} \circ \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{OM}),$$

ce qui montre que $\overrightarrow{f_1 \circ f_2} = \overrightarrow{f_1} \circ \overrightarrow{f_2}$. On a donc un homomorphisme de groupes. Il est surjectif car tout élement $\overrightarrow{u}$ de $\mathbf{GL}(E)$ admet pour antécédent la transformation affine $u(M) = O + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{OM})$, qui fixe O (on a donné une *section* de la surjection). Un élément f dans le noyau vérifie pour tout M, $f(M) = f(O) + \overrightarrow{OM}$, ou encore $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{OM}$, puis $\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{Mf(M)}$. On reconnaît une translation de vecteur $\overrightarrow{Of(O)}$. Le noyau est donc le sous-groupe des translations. Enfin, si on note t_v la translation de vecteur v, $f \circ t_v \circ f^{-1}$ a une partie vectorielle triviale, c'est donc une translation (variante : le noyau de φ est un sous-groupe distingué de $\mathbf{GA}(\mathcal{E})$). Plus précisément, $\forall M \in \mathcal{E}, (f \circ t_v \circ f^{-1})(M) = f(f^{-1}(M) + v) = M + \overrightarrow{f}(v)$ donc $f \circ t_v \circ f^{-1}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{f}(v)$. Le groupe $(\mathbf{GA}(\mathcal{E}), \circ)$ est produit semi-direct du groupe $(\mathbf{GL}(E), \circ)$ par le groupe $(E, +)$, suivant l'action $L \cdot v = L(v)$.