Correction d'un exercice 1.

1. L'espace des formes linéaires (noté E^*) sur un espace vectoriel E de dimension n est de dimension n (par exemple, il est isomorphe par choix d'une base à l'espace des matrices de taille $n \times 1$).

2. Il suffit d'invoquer le théorème suivant pour établir l'existence des ϕ_i : soit deux espaces vectoriels E et F, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de F. Alors il existe une unique application linéaire u telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$. Elle est donnée par $u(\sum_i a_i e_i) = \sum_i a_i f_i$ (pour prouver l'existence dans le théorème, il suffit de voir que cette formule définit bien une application linéaire ; l'unicité est évidente). Remarquez qu'aucune hypothèse de dimension n'a été faite dans le théorème.

Si $\sum_i \lambda_i \phi_i = 0$ est une relation de dépendance linéaire entre les ϕ_i, une évaluation de ceci en e_j, pour n'importe quel j, amène :

$$0 = \sum_i \lambda_i \phi_i(e_j) = \sum_i \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j,$$

et donc la relation initiale est triviale. Cela montre la liberté de la famille ϕ_i. Le nombre d'éléments dans cette famille est égal à la dimension de l'espace des formes linéaires, c'est donc une base (appelée base duale de la base (e_i)).

3. Tout vecteur non nul peut être complété en une base de E, et une forme linéaire qui ne s'annule pas en ce vecteur est alors donnée par la question précédente. On a donc montré que pour tout vecteur non nul, il existe une forme linéaire qui ne s'annule pas en ce vecteur. Par contraposition, tout vecteur en lequel toutes les formes linéaires s'annulent est nul.

4. On pose, pour $(\psi_i)_i$ n formes linéaires linéairement indépendantes (et donc une famille génératrice de l'espace des formes linéaires, par la question 1.) :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\psi_i(y).$$

La symétrie de $< x, y >$ est claire (par commutativité de la multiplication réelle), la linéarité provient de la linarité des ψ_i et de la somme. On a l'identité : $< x, x >= \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)^2$, qui est un réel positif, pour tout x. De plus, en tant que somme de réels positifs, $< x, x >$ est nul si et seulement si chacun des $\psi_i(x)^2$ est nul, soit encore si et seulement si chacun des $\psi_i(x)$ est nul. Puisque la famille ψ_i est génératrice, c'est équivalent à ce que $\psi(x)$ soit nul pour toute forme linéaire ψ, et c'est donc équivalent à $x = 0$ par la question 3. On a donc bien une forme bilinéaire symétrique définie positive. Remarquez qu'on ne s'est en fait servi que de ce que la famille ψ_i

engendre l'espace des formes linéaires, et pas de sa liberté, ni de son cardinal.

5. La réponse est non. Par exemple, dans $\mathbf{R}^2$, on considère la forme linéaire $\psi((x,y),(x',y')) = xx'$. Alors :

$$\psi((0,1),(0,1)) = 0,$$

ce qui est une obstruction à l'aspect défini.

6. La formule :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{r} \psi_i(x)\psi_i(y),$$

définit une forme bilinéaire symétrique, telle que $< x, x >$ est positif pour tout x. Si on suppose que c'est un produit scalaire, alors pour tout x non nul, $< x, x >$ est strictement positif, donc l'un des termes $\psi_i(x)$ est non nul. Tout vecteur non nul est en dehors du noyau d'au moins un des ψ_i. Ainsi, l'intersection U des noyaux des ψ_i est réduite au vecteur nul. Supposons que le sous-espace V de E^* engendré par la famille (ψ_i) soit de dimension s (avec don $s \leq n$). Alors, l'intersection U est encore égale à l'intersection des noyaux d'une base de V (vérifiez !), c'est-à-dire à l'intersection des noyaux de s formes linéaires. On invoque pour conclure le fait général, démontré ci-dessous : l'intersection des noyaux de s formes linéaires est de dimension au moins $n - s$. Puisque U est de dimension 0, cela donne $0 \geq n - s$ et donc $s \geq n$, puis $s = n$, soit encore $V = E^*$.

Pour deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace de dimension finie E, on a :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

En particulier, si F est un hyperplan (de dimension $n - 1$), si G est de dimension d, alors le sous-espace $F + G$ contient F donc est de dimension n ou $n - 1$:

$$\dim F \cap G = n - 1 + t - \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ n \end{array} \right. .$$

Ainsi $F \cap G$ est de dimension t ou $t-1$; de dimension au moins $t-1$ est ce qui nous intéresse. Le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan, l'intersection de deux tels noyaux est par ce qui précède de dimension au moins $n - 2$, puis, par récurrence, l'intersection des noyaux de s formes linéaires est de dimension au moins $n - s$.