Exercice à rédiger 1 : formes linéaires et produit scalaire.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Donner la dimension de l'espace des formes linéaires sur E.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que pour chaque $i = 1, \dots, n$, il existe une forme linéaire ϕ_i telle que pour tout $j = 1, \dots, n$, $\phi_i(e_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} est le symbole de Kronecker et vaut 1 si $i = j$, 0 sinon). Montrer que la famille ϕ_i est libre dans l'espace des formes linéaires. En déduire que c'est une base de cet espace.

3. Montrer que si un vecteur $x \in E$ est tel que pour toute forme linéaire ϕ, $\phi(x) = 0$, alors x est le vecteur nul.

4. En déduire que pour $\psi_1, \dots, \psi_n$ des formes linéaires linéairement indépendantes, la formule :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\psi_i(y)$$

définit un prouit scalaire sur E.

5. Est-ce toujours vrai si on prend seulement une famille libre de formes linéaires comptant moins de n éléments ? En cas de réponse négative, on fournira un contre-exemple.

6. Montrer que si $\sum_{i=1}^{r} \psi_i(x)\psi_i(y)$ définit un produit scalaire entre x et y, alors la famille de formes linéaires $(\psi_1, \dots, \psi_r)$ engendre l'espace des formes linéaires. On pourra montrer que l'intersection des noyaux de $n - 1$ formes linéaires est de dimension ≥ 1.