Exercice 1.

a) La première égalité peut se prouver directement par équivalence : $x \in (\mathrm{Im} f)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, f(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle f^*(x), y\rangle = 0 \Leftrightarrow f^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^*)$. En remplaçant f par f^* (et en utilisant que $(f^*)^* = f$) on en déduit $(\mathrm{Im} f^*)^\perp = \mathrm{Ker}(f)$, donc $(\mathrm{Ker} f)^\perp = (\mathrm{Im}(f^*)^\perp)^\perp$. Il reste donc à prouver que pour tout s.e.v. F d'un espace euclidien E (supposé de dimension finie n), on a $(F^\perp)^\perp = F$. Or F est trivialement inclus dans $(F^\perp)^\perp$, et de même dimension (finie), (en appliquant deux fois la formule $dim(F^\perp) = n - dim(F)$), d'où la conclusion.

b) On suppose $f^{-1} = f^*$, donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f^{-1} - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f^* - \mathrm{id})$, or $(f^* - \mathrm{id}) = (f - \mathrm{id})^*$ d'où finalement d'après a), $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = (\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}))^\perp$. D'autre part, $(f - \mathrm{id})^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f - id) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, d'où finalement $(f - \mathrm{id})^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f - id) \subset (\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}))^\perp \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) = \{0\} \Leftrightarrow f = \mathrm{id}$.

Exercice 2.

$d \Rightarrow a$ (d) se traduit par $p^* = p$. On en déduit $(\mathrm{Im} p)^\perp = \mathrm{Ker} p$ c'est-à-dire (a).

$a \Rightarrow b$ immédiat.

$b \Rightarrow c$ (b) se traduit par $\forall u \in \mathrm{Im}(\mathrm{id} - p), \forall v \in \mathrm{Im} p, u \perp v$ c'est-à-dire $\forall x, y \in E, \langle x - p(x), p(y)\rangle = 0$, d'où (c).

$c \Rightarrow d$ D'après (c), $\langle x, p(y)\rangle$ est symétrique en les variables x, y.

Exercice 3.

a) Soit p la projection orthogonale sur Δ (de vecteur directeur $v = (1, 2, -3)$. $p(x, y, z) \in \Delta$ et $(x, y, z) - p(x, y, z) \in \Pi$ donc $p(x, y, z) = \lambda(1, 2, -3)$ et $0 = (x - \lambda) + 2(y - 2\lambda) - 3(z + 3\lambda) = x + 2y - 3z - 14\lambda$, d'où $p(x, y, z) = \frac{x+2y-3z}{14}(1, 2, -3)$, donc la matrice de p est $P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ (elle est bien symétrique, et on vérifierait facilement que $P^2 = P$). Celle de la projection orthogonale $q = id - p$ sur Π est donc $I - P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

b) La symétrie orthogonale par rapport à Π est $2q - id = id - 2p$, de matrice $I - 2P = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Notons $f = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - x_2 + x_3\right)$, $f_2(x) = x_2 - x_3$, $f_3(x) = \sqrt{3}x_3$, ainsi $\langle x, y\rangle = f_1(x)f_1(y) + f_2(x)f_2(y) + f_3(x)f_3(y)$.

a) Les f_i sont linéaires donc $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire symétrique. $\forall x \in \mathbf{R}^3, \langle x, x\rangle = \sum f_i^2(x) \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, donc $\langle\ ,\ \rangle$ est définie positive.

b) $f(e_1) = (1/\sqrt{3}, 0, 0)$, $f(e_2) = (-1, 1, 0)$ donc $\langle e_1, e_1\rangle = 1/3$, $\langle e_2, e_2\rangle = 2$, $\langle e_1, e_2\rangle = -1/\sqrt{3}$, et $\cos\widehat{(e_1, e_2)} = \frac{\langle e_1, e_2\rangle}{\|e_1\|\|e_2\|} = -1/\sqrt{2}$ donc $\widehat{(e_1, e_2)} = \pm 3\pi/4$.

c) x est orthogonal au plan engendré par e_1, e_2 ssi il est orthogonal à e_1 et e_2, i.e. ssi $f_1(x) = f_2(x) = 0$, i.e. $x_2 = x_3$ et $x_1 = 0$, i.e. $x \in \mathbf{R}(0, 1, 1)$.

d) Il s'agit de choisir $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tels que les $f(\varepsilon_i)$ forment une base orthonormée pour le produit scalaire usuel. Le choix plus simple, $f(\varepsilon_i) = e_i$, donne $\varepsilon_1 = (\sqrt{3}, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (\sqrt{3}, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. (On retrouve ainsi c)).

Exercice 5.

a) Si s est diagonalisable et ses seules valeurs propres sont ± 1 alors s^2 est diagonalisable et sa seule valeur propre est 1, donc $s^2 = \mathrm{id}_E$. Réciproquement si $s^2 = \mathrm{id}_E$, le polynôme minimal de s divise $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, donc s est diagonalisable et ses seules valeurs propres sont ± 1.

b) Soit s une symétrie (donc $s^{-1} = s$ et d'après a), s est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$). Alors $s \in \mathrm{O}(E) \Leftrightarrow s^* = s^{-1} \Leftrightarrow s^* = s \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \perp \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$. (La dernière équivalence vient du fait qu'un endomorphisme est symétrique ssi il est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux).

c) D'après ce qui précède, les symétries appartenant à $\mathrm{O}(E)$ sont les symétries orthogonales, c'est-à-dire de la forme : symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$, pour un s.e.v. quelconque F de E. Le cas $F = E$ correspond à $s = \mathrm{id}_E$, le cas $F = \{0\}$ à $s = -\mathrm{id}_E$. Pour $E = \mathbf{R}^2$, les cas restants sont $F =$ une droite.

Exercice 6. D'une part, $f^* = f^{-1}$ donc $f = f^{-1} \Leftrightarrow f = f^*$ donc f est une symétrie ssi f est symétrique. D'autre part les seules valeurs propres réelles de f sont ± 1, donc (cf question a de l'exercice précédent) f est une symétrie ssi f est diagonalisable.

Exercice 7.

a) Pour toute droite D_2, $s_2^{-1} \circ r$ est une isométrie indirecte donc est de la forme s_1 pour une certaine droite D_1. De même pour toute droite D_1, $r \circ s_1^{-1}$ est de la forme s_2 pour une certaine droite D_2.

b) Si $u \in D_1$, $r(u)+u = s_2(u)+u$, qui est fixe par s_2 donc appartient à D_2, et $r(u)-u = s_2(u)-u$, qui est transformé par s_2 en son opposé donc est orthogonal à D_2.

c) $r(u) + u$ (resp. $r(u) - u$), s'il est non nul, fait avec u un angle (orienté) égal à $\theta/2$ (resp. $\theta/2 + \pi/2$) modulo π, car le quotient des deux affixes est $e^{i\theta} + 1 = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$ (resp. $e^{i\theta} - 1 = 2\sin(\theta/2)e^{i(\theta/2+\pi/2)}$), et d'après b), dirige D_2 (resp. $D_2^\perp$). Or au moins l'un de ces deux vecteurs est non nul, d'où le résultat.

d) Appliquons b) pour $u = (d, -c)$. Si r est la rotation de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (avec $a^2 + b^2 = 1$), $D_2 \ni r(u)+u = ((a+1)d+bc, bd-(a+1)c)$ et $D_2^\perp \ni r(u)-u = ((a-1)d+bc, bd+(1-a)c)$, donc D_2 a pour équation $((a+1)c - bd)x + ((a+1)d + bc)y = 0$ si $a \neq -1$ et $((a-1)d + bc)x + (bd + (1-a)c)y = 0$ si $a \neq 1$ (si $a \neq \pm 1$, ces deux équations sont donc équivalentes). En particulier pour $(a, b) = (0, 1)$, D_2 a pour équation $(c-d)x + (c+d)y = 0$, et pour $(a, b) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$, $((2+\sqrt{3})c + d)x + ((2+\sqrt{3})d - c)y = 0 \Leftrightarrow ((\sqrt{3}-2)d - c)x + (-d + (2-\sqrt{3})c)y = 0$.

e) $(s_2 \circ s_1)^{-1} = s_1^{-1} \circ s_2^{-1} = s_1 \circ s_2$, donc $s_2 \circ s_1 = r \Leftrightarrow s_1 \circ s_2 = r^{-1}$.

Exercice 8. A, B, C sont orthogonales. De plus A est symétrique.

a) Pour A les sous-espaces propres sont $E_1 =$ le plan d'équation $x+y+z = 0$ et $E_{-1} = \mathbf{R}(1,1,1)$ donc A est la réflexion par rapport à E_1. Remarque : $Tr(A) = 1$ est bien égal à $1 + 1 - 1$.

b) $Tr(B) = 2 > 1$ donc B est une rotation, dont l'angle θ non orienté vérifie $1+2\cos\theta = Tr(B) = 2$ i.e. $\theta = \pm\pi/3$, et d'axe $\mathrm{Ker}(B - I) = \mathbf{R}(1,1,1)$. Si on oriente cet axe par le vecteur unitaire $n := (1,1,1)/\sqrt{3}$, la partie antisymétrique de B doit être égale à $(\sin\theta)n\wedge$ (cf exercice 10.a).

On en déduit $\theta = -\pi/3$.
Autre méthode : on remarque que $-B(e_1) = A(e_2), -B(e_2) = A(e_3), -B(e_3) = A(e_1)$ i.e. $-B = AR$ où R est la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de n. Donc $B = (-A)R =$ la rotation d'angle $2\pi/3 - \pi = -\pi/3$ autour de n (ou, ce qui revient au même, d'angle $\pi/3$ autour de $-n$).

c) $C^3 = -I$ donc $det(C) = -1$ donc $-C$ est une rotation, dont l'angle θ non orienté vérifie $1 + 2\cos\theta = Tr(C) = 0$ i.e. $\theta = \pm 2\pi/3$, et d'axe $\mathrm{Ker}(-C - I) = \mathbf{R}(-1, 1, 1)$. Si on oriente cet axe par le vecteur unitaire $n := (-1, 1, 1)/\sqrt{3}$ on trouve (par la même méthode que pour B) $\theta = -2\pi/3$. Donc C est la composée de la rotation d'angle $\pi/3$ autour de k par la réflexion par rapport à $k^\perp$.
Remarque : $SC = R'$ où S est la réflexion qui fixe e_1, e_3 et envoie e_2 sur $-e_2$ et R' est la rotation inverse du R précédent. Donc $C = SR'$, mais ce n'est pas la factorisation canonique car S et R' ne commutent pas.

Exercice 9.

a) Soit s^* l'adjoint de s. Si $s \in \mathrm{GO}(E)$ alors $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle s^*s(x), y\rangle = 0$ i.e. $\forall x \in E, x^\perp \subset s^*s(x)^\perp$ i.e. $\forall x \in E, \mathbf{R}s^*s(x) \subset \mathbf{R}x$ i.e. tout vecteur de E est propre pour s^*s i.e. s^*s est une homothétie. Notons k_s son rapport. On a alors $\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x), s(y)\rangle = \langle s^*s(x), y\rangle = k_s \cdot \langle x, y\rangle$. En particulier $\forall x \in E, \|s(x)\|^2 = k_s. \|x\|^2$ donc $k_s \geq 0$, et même $k_s > 0$ puisque $s \neq 0$.

b) Si $s \in \mathrm{GO}(E)$, utilisons a) et posons $t = s/\sqrt{k_s}$, alors $\forall x \in E, \|t(x)\| = \|x\|$ donc $t \in \mathrm{O}(E)$. Réciproquement, s'il existe $k_s > 0$ et $t \in \mathrm{O}(E)$ tels que $s = \sqrt{k_s}t$ alors $\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x), s(y)\rangle = k_s\langle t(x), t(y)\rangle = k_s\langle x, y\rangle$ donc $s \in \mathrm{GO}(E)$.

c) ($\mathbf{R}_+^*$ est un groupe pour la multiplication, $O(E)$ pour la composition, et leur produit est muni de la structure de groupe produit). Cette application φ vérifie $\varphi((\lambda, p)(\mu, q)) = \varphi(\lambda.\mu, p \circ q) = (\lambda\mu)(p \circ q) = (\lambda p) \circ (\mu q) = \varphi(\lambda, p) \circ \varphi(\mu, q)$ donc φ est un morphisme de groupes. Si $(\lambda, p) \in Ker\varphi$ alors $\forall x \in E, \|x\| = \|p(x)\| = \|x\|/\lambda$ donc $\lambda = 1$, donc $p = \mathrm{id}_E$. Donc $Ker\varphi = \{(1, id_E)\}$ (donc φ est injective). D'après b, $Im\varphi = GO(E)$. On en déduit que $GO(E)$ est isomorphe à $\mathbf{R}_+^* \times \mathrm{O}(E)$.

Exercice 10.

a) On a bien pour $x \perp n$, $f(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)n \wedge x$ et $f(n) = (\cos\theta)n + (1 - \cos\theta)\langle n, n\rangle n$.

b) Si $n = (a, b, c)$, on a donc $f(x, y, z) = \cos\theta(x, y, z) + \sin\theta(bz - cy, cx - az, ay - bx) + (1 - \cos\theta)(ax + by + cz)(a, b, c) = ((\cos\theta + a^1(1 - \cos\theta))x + (-c(\sin\theta) + ab(1 - \cos\theta))y + (b\sin\theta + ac(1 - \cos\theta))z, (c\sin\theta + ab(1 - \cos\theta))x + (\cos\theta + b^2(1 - \cos\theta))y + (-a\sin\theta + bc(1 - \cos\theta))z, (-b\sin\theta + ac(1 - \cos\theta))x + (a\sin\theta + bc(1 - \cos\theta))y + (\cos\theta + c^2(1 - \cos\theta))z)$, donc f a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta + a^1(1 - \cos\theta) & -c(\sin\theta) + ab(1 - \cos\theta) & b\sin\theta + ac(1 - \cos\theta) \\ c\sin\theta + ab(1 - \cos\theta) & \cos\theta + b^2(1 - \cos\theta) & -a\sin\theta + bc(1 - \cos\theta) \\ -b\sin\theta + ac(1 - \cos\theta) & a\sin\theta + bc(1 - \cos\theta) & \cos\theta + c^2(1 - \cos\theta) \end{pmatrix}$
(pour $n = (0, 0, 1)$ ou pour $\theta = 0$, on retrouve bien les cas connus).

Exercice 11. $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$, en particulier $p(v) = v - \langle u, v\rangle u$, donc $p(u) = 0$ et $\forall v \perp u, p(v) = v$.

Exercice 12.

a) f est linéaire car $\wedge$ est bilinéaire. $\mathrm{Ker}f = \mathbf{R}u$ et $\mathrm{Im}f = u^\perp$.

b) $F = f^{-1}(\{v\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow v \in \mathrm{Im}f \Leftrightarrow v \perp u$.

c) $w \in F \Leftrightarrow f(w) = f(w_0) \Leftrightarrow w - w_0 \in \mathrm{Ker}f = \mathbf{R}u$.

d) $f(v \wedge u) = u \wedge (v \wedge u) = p(v) = v$ d'après l'exercice précédent (puisqu'on a supposé $F \neq \emptyset$, i.e. d'après b, $v \perp u$), donc $w_0 := v \wedge u \in F$ donc d'après c, $F = v \wedge u + \mathbf{R}u$.

Exercice 13. Remarquons que $\phi > 0$ et $A_\phi \in G$ (car G est fini donc l'inf qui définit ϕ est en fait un min).

a) Il s'agit de trouver $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta - k\phi \in [0;\phi[$ i.e. $\theta/\phi \in [k, k+1[$. La solution (unique) est $k = E(\theta/\phi)$. Comme $A_\phi \in G$, si $A_\theta \in G$ on a $A_\psi = A_\theta(A_\phi^{-k}) \in G$, or $\psi \in [0,\phi[$ donc (par définition de ϕ) $\psi = 0$, i.e. $A_\theta = A_\phi^k$. Donc G est cyclique, engendré par A_ϕ. Plus rapidement, si l'on sait que tout sous-groupe non dense K de $\mathbf{R}$ est monogène : G peut être considéré comme un sous-groupe de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ dont l'image réciproque K dans $\mathbf{R}$ est non dense (car G fini) donc monogène, donc l'image G de K dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ est aussi monogène.

b.i) Puisque $G \not\subset \mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$, soit $B \in G \setminus H$. Alors $G \setminus H = HB$ (car $\forall C \in G \setminus H, C(B^{-1}) \in H$). Autre preuve : le morphisme $det : G \to \{-1,+1\}$ est surjectif et a pour noyau H donc G/H est un groupe isomorphe à $\{-1,1\}$.

b.ii) $H = \{I_2, A, \ldots, A_{n-1}\}$ et (d'après b.i) $G = H \cup HB$, d'où
$G = \{I_2, A, \ldots, A^{n-1}, B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$.
Autre preuve : G a $2n$ éléments (d'après b.i) et contient (au moins) les A^iB^j pour $0 \leq i < n$ et $0 \leq j \leq 1$, or ces éléments-là sont au nombre de $2n$ car distincts deux à deux (puisque si $0 \leq i,i' < n$ et $0 \leq j,j' \leq 1$ et $A^iB^j = A^{i'}B^{j'}$ alors – en évaluant le déterminant – $(-1)^j = (-1)^{j'}$ donc $j = j'$, donc il reste $A^i = A^{i'}$, d'où, puisque A est d'ordre n, $i = i'$).
Le groupe diédral D_n (d'ordre $2n$) a (au moins) trois définitions possibles :

- $G_1 =$ le groupe des isométries d'un polygone régulier à n sommets
- (seulement si $n \geq 3$) $G_2 =$ le sous-groupe de S_n engendré par la composée de transpositions $(1,n)(2,n-1)\ldots$ et par la permutation circulaire $(1,2,\ldots,n)$
- $G_3 =$ le groupe défini par la “ présentation” (par générateurs et relations) $< a, b; a^n, b^2, baba >$, c'est-à-dire le quotient du groupe libre F_2 à deux générateurs a', b' par le plus petit sous-groupe distingué contenant $a'^n, b'^2, b'a'b'a'$ (dans ce quotient G_3, les images a, b de a', b' sont donc des générateurs et les “seules” relations vérifiées par a, b sont $a^n = 1, b^2 = 1, baba = 1$ – à part bien sûr toutes les relations conséquences de ces trois-là).

Montrons que $G \simeq G_3 \simeq G_1$ et que si $n \geq 3$, $G_2 \simeq G_1$.

- Si $n \geq 3$ (mais pas si $n = 2$) le morphisme naturel de G_1 dans G_2 (qui à une isométrie du polygone associe sa restriction à l'ensemble des sommets) est injectif (car le polygone engendre le plan). De plus il est toujours surjectif (il existe une symétrie orthogonale axiale qui réalise $(1,n)(2,n-1)\ldots$ et une rotation qui réalise $(1,2,\ldots,n)$). Donc si $n \geq 3$, $G_2 \simeq G_1$.
- Les générateurs A, B de G vérifient $A^n = id$ (car A est d'ordre n), $B^2 = id$ (car $B \in \mathrm{O}(2,\mathbf{R}) \setminus \mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ donc B est une symétrie) et $(BA)^2 = id$ (pour la même raison), donc le noyau du morphisme (surjectif) $F_2 \to G, a' \mapsto A, b' \mapsto B$ contient $a'^n, b'^2, b'a'b'a'$, donc ce morphisme se factorise par un morphisme (surjectif) $G_3 \to G, a \mapsto A, b \mapsto B$. Cette surjection est bijective car G_3 a au plus $2n$ éléments (car d'après les relations $a^n = 1, b^2 = 1, ba = a^{-1}b$, on a $G_3 \subset \{a^ib^j \mid 0 \leq i < n, 0 \leq j \leq 1\}$). Donc $G_3 \simeq G$.
- Tout ce qui a été dit pour G s'applique en particulier à G_1 (qui est bien un sous-groupe fini de $\mathrm{O}(2,\mathbf{R})$, non inclus dans $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ et tel que $G_1 \cap \mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ soit d'ordre n, puisque constitué des rotations d'angle $\in \mathbf{Z}2\pi/n$). Donc $G_3 \simeq G_1$.