Exercice 1.

a) Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien.
Montrer que $(\mathrm{Im} f)^\perp = \mathrm{Ker}(f^*)$ et $(\mathrm{Ker} f)^\perp = \mathrm{Im}(f^*)$.

b) Soit f une transformation orthogonale d'un espace euclidien. Déduire de (a) que $(\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}))^\perp = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$. En déduire que si $(f-\mathrm{id})^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}$.

Exercice 2. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, F, G deux sous-espaces supplémentaires dans E, et $p : E \to E$ le "projecteur" (= la projection) sur F parallèlement à G. On rappelle que $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}-p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}-p)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes (le projecteur p est alors appelé "le projecteur orthogonal sur F") : (a) $G = F^\perp$, (b) $G \subset F^\perp$, (c) $\forall x, y \in E,\ \langle p(x), p(y)\rangle = \langle x, p(y)\rangle$, (d) $\forall x, y \in E,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$.
(pour $d \Rightarrow a$, utiliser l'exercice 1.a)

Exercice 3. Soient Π le plan de $\mathbf{R}^3$ d'équation cartésienne $x + 2y - 3z = 0$ (dans la base canonique), et $\Delta = \Pi^\perp$.

a) Déterminer les matrices qui représentent les projections orthogonales sur Δ et sur Π.

b) En déduire la matrice qui représente la symétrie orthogonale par rapport à Π.

Exercice 4.

a) Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ définie par :

$$\langle x, y\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - x_2 + x_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - y_2 + y_3\right) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + 3x_3y_3$$

est un produit scalaire, (x_1, x_2, x_3) (resp. (y_1, y_2, y_3)) étant les coordonnées de x (resp. y) dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$.

b) Pour *ce* produit scalaire, déterminer l'angle (non orienté) entre les vecteurs e_1 et e_2.

c) Déterminer le sous-espace orthogonal au plan engendré par les vecteurs e_1 et e_2.

d) Donner une base orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 5. (Questions de cours). Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Une symétrie de E est un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{id}_E$. Redémontrer les propriétés suivantes.

a) Un endomorphisme s de E est une symétrie ssi s est diagonalisable et ses seules valeurs propres sont 1 et -1.

b) Pour toute symétrie s on a les équivalences : s est une transformation orthogonale ssi s est symétrique (i.e. $s^* = s$) ssi $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ sont orthogonaux.

c) Caractériser les symétries orthogonales de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 6. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f une transformation orthogonale de E. Démontrer les équivalences : f est une symétrie (orthogonale) ssi f est symétrique (i.e. $f^* = f$) ssi f est diagonalisable.

Exercice 7.

a) (Re-)démontrer que toute rotation r dans $\mathbf{R}^2$ s'écrit d'une infinité de façons $s_2 \circ s_1$ où s_i est la symétrie orthogonale par rapport à une droite D_i, l'une des deux droites pouvant être choisie arbitrairement.

b) Montrer que pour tout $u \in D_1$, $r(u) + u \in D_2$ et $r(u) - u \perp D_2$.

c) Si θ est l'angle (modulo 2π) de r, démontrer que l'angle $\widehat{D_1 D_2}$ (modulo π) est égal à $\theta/2$.

d) Etant donnée D_1 d'équation $cx + dy = 0$ (dans la base canonique), donner une équation de D_2 pour les rotations suivantes : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où $a^2 + b^2 = 1$.

e) Démontrer que $s_1 \circ s_2 = r^{-1}$ (ce qui permet d'échanger les rôles de D_1, D_2).

Exercice 8. Préciser la nature des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ qui dans la base canonique sont représentés par les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension ≥ 1. On dit que $s \in \mathrm{End}(E)$ est une *similitude* (vectorielle) de E si $s \neq 0$ et $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle s(x), s(y) \rangle = 0$ et on note $\mathrm{GO}(E)$ l'ensemble des similitudes (vectorielles) de E.

a) Montrer que si $s \in \mathrm{GO}(E)$ alors il existe $k_s \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, \|s(x)\|^2 = k_s . \|x\|^2$ (on montrera d'abord qu'il existe $k_s \in \mathbf{R}$ tel que $\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x), s(y) \rangle = k_s \cdot \langle x, y \rangle$).

b) En déduire que $s \in \mathrm{GO}(E)$ ssi $\exists k_s \in \mathbf{R}_+^*, s/\sqrt{k_s} \in \mathrm{O}(E)$.

c) Montrer que l'application $\mathbf{R}_+^* \times \mathrm{O}(E) \to \mathrm{GL}(E), (\lambda, p) \mapsto \lambda p$ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ? son image ? qu'en déduit-on ?

Exercice 10. Soient n un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^3$ et f la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par n.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}^3, f(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)n \wedge x + (1 - \cos\theta)\langle x, n \rangle n$. (Remarquer que par linéarité, il suffit de vérifier cette formule pour $x \perp n$ et pour $x = n$)

b) A l'aide de cette relation, donner la matrice de f dans la base canonique en fonction de θ et des composantes de n.

Exercice 11. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $u \in E$ un vecteur unitaire et $p : E \to E$ définie par $p(v) = u \wedge (v \wedge u)$. Montrer que p est la projection orthogonale sur le plan $u^\perp$.

Exercice 12. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, et u, v deux vecteurs de E, avec $u \neq 0$; on se propose de déterminer l'ensemble F des $w \in \mathbf{R}^3$ tels que $u \wedge w = v$.

a) Pourquoi $f : E \to E$ définie par $f(x) = u \wedge x$ est-elle linéaire ? Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u et v pour que $F \neq \emptyset$.

c) On suppose désormais cette condition réalisée. Soit w_0 un vecteur de F. Montrer que (pour tout $w \in E$) $w \in F \Leftrightarrow w - w_0 \in \mathbf{R}u$.

d) Calculer $f(v \wedge u)$ (cf exercice précédent). En déduire F.

Exercice 13. Soit G un sous-groupe **fini** de $\mathrm{O}(2, \mathbf{R})$ d'ordre supérieur ou égal à 2.

a) Supposons que $G \subset \mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$. Posons $\phi = \inf \{\theta \in]0, 2\pi[\mid A_\theta \in G\}$, où A_θ désigne la rotation d'angle θ. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, il existe $k \in \mathbf{Z}$ et $\psi \in [0, \phi[$ tels que $\theta = k\phi + \psi$. Montrer que lorsque $A_\theta \in G$, $\psi = 0$. En déduire que G est cyclique.

b) Supposons que $G \not\subset \mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$. Soient $H = G \cap \mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$ (cyclique d'après (a)) et n son ordre

i) Montrer que $[G : H] = 2$ (donc si $n = 1$, G est cyclique d'ordre 2).

ii) Si $n \geq 2$, soient A un générateur de H et $B \in G \setminus H$.
Montrer que $G = \{I_2, A, \ldots, A^{n-1}, B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$ et que G est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$.