MAPES – Algèbre et Géométrie, partiel du 14 mars 2008.

Les notes de cours et de TD sont autorisées.

Ce sujet comporte deux pages.

Exercice 1.

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace vectoriel euclidien. Si $x, y \in E$ sont tels que $< x, y >= 0$, on dit qu'ils sont orthogonaux et on note $x \perp y$. Les similitudes de E sont les automorphismes de E qui conservent l'orthogonalité :

$$\mathrm{Sim}(E) = \{u \in GL(E) / \forall x, y \in E, x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)\}.$$

Elles forment un sous-groupe de $GL(E)$. On considère par ailleurs l'ensemble suivant :

$$\mathcal{G} = \{u \in GL(E) / \forall v \in O(E), uvu^{-1} \in O(E)\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $GL(E)$ pour la composition.
2. Montrer que $\mathrm{Sim}(E)$ est inclus dans $\mathcal{G}$ (*on pourra utiliser, sans le redémontrer, le fait que, pour toute similitude u, il existe un unique couple $(\lambda, u_0) \in \mathbf{R}^{\times +} \times O(E)$ tel que $u = \lambda \mathrm{Id}_E \circ u_0$*).
3. On souhaite montrer l'inclusion réciproque. Soit $u \in \mathcal{G}$ et x, y deux vecteurs orthogonaux de E.
   (a) Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale s telle que $s(x) = x$ et $s(y) = -y$. Soient F et G les sous-espaces propres de s associés à 1 et -1 respectivement (donc $x \in F$ et $y \in G$).
   (b) (Re)démontrer que $F \oplus G = E$ et que $F \perp G$.
   (c) Montrer que $s' = usu^{-1}$ est d'une part une transformation orthogonale, d'autre part une symétrie. On notera F' et G' les sous-espaces propres de s' associés à 1 et -1 respectivement. En déduire que F' et G' sont en somme directe et sont orthogonaux.
   (d) Montrer que $u(F) \subset F'$ et $u(G) \subset G'$.
   (e) Conclure.
4. D'après la question 3) d), u définit par restriction une application linéaire de F dans F' d'une part, une application linéaire de G dans G' d'autre part. Montrer que ce sont des isomorphismes.

Deuxième page.

Exercice 2.

On considère $\mathbb{R}^4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ avec sa structure affine canonique. Soient $F = \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$ et $G = \{(1,1,1,1) + t(1,2,3,4) | t \in \mathbb{R}\}$ des sous-espaces affines.

1. Déterminer l'intersection de F et G.
2. Déterminer le sous-espace affine $Aff(F \cup G)$ engendré par F et G.

Exercice 3.

Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. On se propose de déterminer, par trois méthodes différentes, l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et dans le repère $\mathcal{R}' = (B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. Les trois questions sont donc indépendantes.

1. Exprimer les coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}'$ d'un point quelconque du plan en fonction de ses coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, puis résoudre $x' = x, y' = y$ et conclure.
2. Montrer qu'un point M de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans (A, B, C) est solution du problème si et seulement si $\alpha = \beta$. Montrer que ceci équivaut à “M est un barycentre de I et de C”, où I désigne le milieu de (A, B), puis conclure.
3. Soit s l'unique application affine qui fixe C et intervertit A et B. Montrer que M est solution du problème si et seulement si $s(M) = M$. Montrer que l'ensemble des points fixes de s est un sous-espace affine. En donner une paramétrisation dans le repère $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Conclure.