MAPES28 – Algèbre et Géométrie II, Examen du 16 mai 2008
Durée : 3h – Documents autorisés : notes de cours et de t.d.

Exercice 1. Soient P, Q deux points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3. On note $G = Is(\{P, Q\})$ le groupe des isométries affines de $\mathcal{E}$ qui fixent ou échangent P et Q, et H le sous-groupe de celles qui fixent P et Q.

a) Décrire géométriquement les éléments de H et démontrer que ce groupe est isomorphe à $O_2(\mathbf{R})$.

b) Trouver un sous-groupe K de G d'ordre 2 tel que l'application $H \times K \to G, (h, k) \mapsto h \circ k$ soit un isomorphisme.

c) Le groupe G est-il abélien ?

Exercice 2. Dans un plan affine $\mathcal{E}$ on considère un triangle non aplati (PQR) et G son isobarycentre.

a) Démontrer qu'il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ envoyant le triangle ordonné (PQR) sur le triangle ordonné (QRP) (c'est-à-dire envoyant P sur Q, Q sur R et R sur P). On fixe désormais $f =$ cette application.

b) Démontrer que $f^3 = id$.

c) Si (α, β, γ) (avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$) est le triplet des coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère (P, Q, R), quel est celui de $f(M)$?

d) En déduire que G est l'unique point fixe de f.

e) En déduire que tout triangle dont les sommets sont permutés circulairement par f a pour isobarycentre G.

f) (Exemple de construction d'un tel triangle) Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$. Démontrer que $f(\mathcal{D})$ est une droite sécante à $\mathcal{D}$ *(indication : déduire de b) et d) que $\overrightarrow{f}$ n'a aucune valeur propre réelle)*. On note alors $\{S\} = \mathcal{D} \cap f(\mathcal{D})$, $T = f(S)$, $U = f(T)$. Caractériser T comme intersection de deux droites. Caractériser de même U.

Exercice 3. Soient $\mathcal{E}$ un plan affine, (ABC) un triangle non aplati, D, E et F les milieux respectifs de $[A, B]$, $[A, C]$ et $[B, C]$, O l'isobarycentre de (ABC), G_1, G_2, G_3 les isobarycentres respectifs de (ADE), (BDF) et (CEF), et I le milieu de $[D, E]$.
Dans les deuxième et troisième parties, $\mathcal{C}$ désignera l'ensemble des points dont les coordonnées barycentriques (x, y, z) dans le repère (A, D, E) vérifient $x^2 = yz$ (et bien sûr $x + y + z = 1$). Ces deuxième et troisième parties sont indépendantes.

Première partie.

1. Faire un dessin.

2. Montrer que les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Donner deux autres relations de parallélisme similaires. En déduire que I est le milieu de (A, F).

3. Montrer que O est l'isobarycentre des triangles (DEF) et $(G_1G_2G_3)$ *(on pourra raisonner directement, ou utiliser l'exercice 2, question e)*.

4. Décrire une homothétie h (centre et rapport) envoyant le triangle ordonné (ADE) sur le triangle ordonné (ABC). De même pour les triangles ordonnés (ADE) et (FED), puis pour les triangles ordonnés (FED) et $(G_1G_2G_3)$. Est-ce encore possible pour les triangles ordonnés (ADE) et (BDF) ?

Deuxième partie. Soit $a \in \mathbf{R}$. On note $K_a = aE + (1-a)A$ et $L_a = aA + (1-a)D$, puis $M_a \in (DK_a) \cap (EL_a)$.

1. Quel est le point M_a dans chacun des cas particuliers $a = 0, 1, 1/2$?

2. Justifier que le point M_a est bien défini (pour tout $a \in \mathbf{R}$) *(indications au choix : on peut par exemple appliquer l'exercice 2 question f, ou encore prouver l'existence et l'unicité de M_a au cours de la réponse à la question 3 ci-dessous).*

3. Calculer (en fonction de a) les coordonnées barycentriques (x_a, y_a, z_a) de M_a dans le repère affine (A, D, E).

4. Calculer leurs limites $(x_\infty, y_\infty, z_\infty)$ quand $a \to \pm\infty$. Quel est le point M_∞ correspondant ?

5. Pour $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, vérifier que

a) $M_a \in \mathcal{C}$,

b) si $y_a \neq 1$ alors $a = \frac{z_a}{1-y_a}$.

c) Donner les deux valeurs de $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ pour lesquelles $y_a = 1$.

6. En déduire que l'application $a \mapsto M_a$ est une bijection de $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ dans $\mathcal{C}$.

Troisième partie. (Etude de la courbe $\mathcal{C}$)

1. Soient $(1-y-z, y, z)$ les coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère (A, D, E) et (u, v) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Exprimer u, v en fonction de y, z *(indication : d'après la première partie, $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AG_1}$).*

b) En déduire qu'il existe une constante K (à déterminer) telle que

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow u^2 + uv + v^2 = K.$$

2. On suppose *dans cette question* que le plan $\mathcal{E}$ est muni d'une structure euclidienne pour laquelle le triangle (ADE) est équilatéral, avec $||\overrightarrow{AG_1}|| = 1$. Calculer $||u\overrightarrow{AD} + v\overrightarrow{AE}||^2$ en fonction de u, v. En déduire l'interprétation géométrique de $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ est un objet remarquable pour les triangles (DEF), $(G_1G_2G_3)$ et (ABC). Le décrire en ces termes.

3. Démontrer qu'il existe une (unique) structure euclidienne sur $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire un unique produit scalaire sur le plan vectoriel associé) pour laquelle les hypothèses de la question précédente sont vérifiées.

4. On note φ la structure euclidienne particulière précédente, et ψ une structure euclidienne quelconque. On rappelle qu'il existe une base (i, j) orthonormée pour ψ et des constantes $a, b > 0$ telles que (ai, bj) soit orthonormée pour φ. Pour une telle base, donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère (O, i, j). En déduire l'interprétation géométrique de $\mathcal{C}$ dans le plan affine euclidien $(\mathcal{E}, \psi)$.