MAPES28 – Algèbre et Géométrie II
Corrigé et barème (sur 30 points) de l'examen du 16 mai 2008

Exercice 1. (sur 4,5 points)

(a) (sur 2) Tout élément de H fixe point par point la droite (PQ), donc est (selon la dimension du sous-espace des points fixes) une rotation d'axe (PQ), une réflexion de plan contenant (PQ), ou l'identité. Réciproquement, toutes ces isométries appartiennent à H. Soit π le plan vectoriel $\overrightarrow{PQ}^{\perp}$. Vue la description de H (pour tout $f \in H$, π est stable par $\overrightarrow{f}$ et) le morphisme $H \to O(\pi), f \mapsto \overrightarrow{f}_{|\pi}$ est bijectif.

(b) (sur 2) Soient s la réflexion par rapport au plan médiateur de (P, Q) et K le sous-groupe (d'ordre 2) qu'elle engendre. Alors s commute à tout élément de H (donc l'application $H \times K \to G, (h, k) \mapsto h \circ k$ est un morphisme) et pour tout $f \in G$, ou bien $f \in H$, ou bien $f \circ s \in H$ (donc ce morphisme est bijectif).

(c) (sur 0,5) G n'est pas abélien : H lui-même ne l'est pas (puisque $O_2(\mathbf{R})$ ne l'est pas).

Exercice 2. (sur 6 points)

(a) (sur 1)(P, Q, R) est un repère affine de $\mathcal{E}$ donc pour tous $P', Q', R' \in \mathcal{E}$ il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ envoyant (PQR) sur $(P'Q'R')$.

(b) (sur 0,5) id est l'unique application affine envoyant (PQR) sur (PQR), donc $f^3 = id$.

(c) (sur 0,5) $f(M) = f(\alpha P + \beta Q + \gamma R) = \alpha f(P) + \beta f(Q) + \gamma f(R) = \alpha Q + \beta R + \gamma P$ a pour coordonnées (γ, α, β).

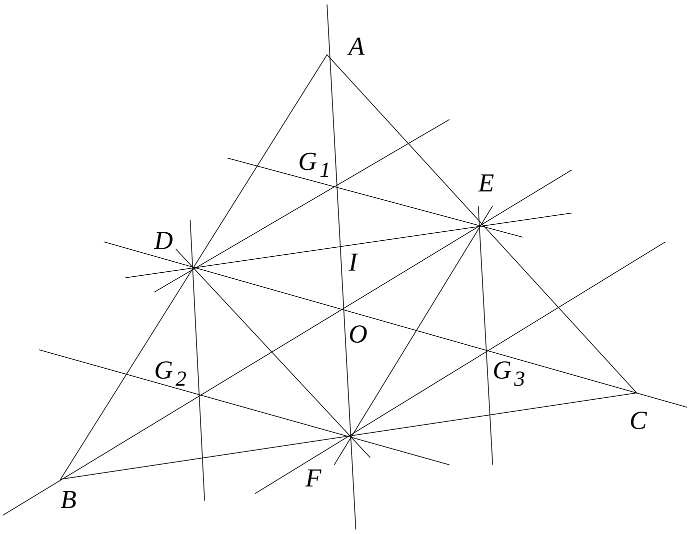
(d) (sur 0,5) $f(M) = M \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow M = G$.

(e) (sur 0,5) Soit M l'isobarycentre d'un triangle dont les sommets sont permutés circulairement par f. Alors $f(M) = M$ donc $M = G$.

(f) (sur 3=2+0,5+0,5) D'après b), $\overrightarrow{f}^3 = id$ donc le polynôme $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ annule $\overrightarrow{f}$, donc 1 est la seule valeur propre réelle possible. D'après d), 1 n'est pas valeur propre. Donc $\overrightarrow{f}$ n'a aucune valeur propre réelle. Donc la droite vectorielle $\overrightarrow{f}(D)$ est différente de D, autrement dit les droites affines $f(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}$ sont non parallèles, donc sont sécantes. $\{T\} = f(\mathcal{D}) \cap f^2(\mathcal{D})$, $\{U\} = f^2(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}$.

Exercice 3.
Première partie. (sur 6 points)

1. (sur 1)



2. (sur 2=1+1) L'homothétie h de centre A et de rapport 2 envoie (ADE) sur (ABC) donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{h}(\overrightarrow{DE}) = 2\overrightarrow{DE}$ donc $(BC)//(DE)$. De même, $(AC)//(DF)$ et $(AB)//(EF)$. En particulier $(ADFE)$ est un parallélogramme donc le milieu de (A, F) est I.
3. (sur 1=0,5+0,5) Appliquons l'exercice 2 avec $(P, Q, R, G) = (A, B, C, O)$: f envoie (DEF) sur (FDE) donc (question e) l'isobarycentre de (DEF) est O. D'autre part f envoie (ADE) sur (BFD) (donc G_1 sur G_2), (BFD) sur (CEF) (donc G_2 sur G_3), et (CEF) sur (ADE) (donc G_3 sur G_1) donc (question e) l'isobarycentre de $(G_1G_2G_3)$ est encore O.
4. (sur 2=0,5+0,5+0,5+0,5) Pour h, cf question 2. D'après cette même question, l'homothétie s de centre I et de rapport -1 échange non seulement E avec D mais aussi A avec F, donc échange (ADE) avec (FED). Puisque $h(G_1) = O$ on a $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, donc l'homothétie h' de centre O et de rapport $1/2$ envoie A sur G_1. De même, $h'(B) = G_2$ et $h'(C) = G_3$. Donc $h' \circ h \circ s$ envoie (FED) sur $(G_1G_2G_3)$. D'après la question 3 elle fixe O. C'est donc l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}2(-1) = -1$. Par contre l'unique application affine qui envoie (ADE) sur (BDF) n'est pas une homothétie (ni une translation) puisque (par exemple) (DE) n'est pas parallèle à (DF). (En fait cette application est la symétrie par rapport à (CD), parallèlement à (AB)).

Deuxième partie. (sur 8,5)

1. (sur 1) $M_0 = D$, $M_1 = E$, $M_{1/2} = G_1$.
2. (sur 1) Appliquons l'exercice 2 à $(P, Q, R) = (A, D, E)$ et $\mathcal{D} = (DK_a)$: $\mathcal{D}$ est sécante à $f(D) = (EL_a)$.
3. (sur 2) Un point appartient à (DK_a) ssi ses coordonnées barycentriques (x, y, z) dans (A, D, E) vérifient $ax = (1-a)z$ et à (EL_a) ssi $ay = (1-a)x$. En remplaçant par exemple y par $1 - x - z$ on en déduit le système de deux équations à deux inconnues $ax + (a-1)z = 0, x + az = a$, dont la solution (unique) est $x_a = \frac{a(1-a)}{a^2-a+1}$, $z_a = \frac{a^2}{a^2-a+1}$, d'où

$y_a = 1 - x_a - z_a = \frac{(1-a)^2}{a^2-a+1}$. (On retrouve en particulier les réponses aux deux questions précédentes).

4. (sur 1) $(x_\infty, y_\infty, z_\infty) = (-1, 1, 1)$ donc $M_\infty = E + \overrightarrow{AD} = F$.
5. (a) (sur 0,5) On vérifie que $x_a^2 = y_a z_a$ (dans les deux cas $a \in \mathbf{R}$ et $a = \infty$).
   (b) (sur 0,5) Si $y_a \neq 1$ (ce qui implique $a \neq \infty, 0$) on vérifie que $\frac{z_a}{1-y_a} = \frac{z_a}{x_a+z_a} = \frac{a^2}{a(1-a)+a^2} = a$.
   (c) (sur 0,5) $y_a = 1$ ssi $a = \infty$ ou $a = 0$.
6. (sur 2) D'après 5.a, $a \mapsto M_a$ est une application de $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ dans $\mathcal{C}$. D'après 5.b (jointe à 5.c et au fait que $M_0 \neq M_\infty$), cette application est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit M de coordonnées barycentriques (x, y, z) dans (A, D, E), avec $x^2 = yz$. Si $y = 1$ alors $(1 - y - z)^2 = yz$ devient $z^2 = z$, donc $z = 0$ ou 1, donc $M = M_0$ ou M_∞. Si $y \neq 1$, posons $a = \frac{z}{1-y}$. Alors $1 - a = \frac{x}{1-y}$, d'où $ax = (1 - a)z$ et $ay = (1 - a)x$, donc (cf question 2) $M = M_a$.

Troisième partie. (sur 5 points)

1. (a) (sur 0,5) $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ donc $(u, v) = (y - 2/3, z - 2/3)$.
   (b) (sur 1) $(1 - y - z)^2 = yz \Leftrightarrow y^2 + z^2 + yz - 2y - 2z + 1 = 0$, or $u^2 + uv + v^2 = y^2 + z^2 + yz - 2y - 2z + 4/3$. Donc $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow u^2 + uv + v^2 = 1/3$.
2. (sur 1,5) On a $||\overrightarrow{AD}||^2 = ||\overrightarrow{AD}||^2 = 2 < \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} >= 3$ donc $||u\overrightarrow{AD} + v\overrightarrow{AE}||^2 = 3(u^2 + uv + v^2)$, donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. C'est le cercle circonscrit à (DEF) et $(G_1G_2G_3)$ et inscrit dans (ABC).
3. (sur 1) Un produit scalaire est déterminé de façon unique par sa matrice (symétrique définie positive) dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, autrement dit par la donnée de $a = ||\overrightarrow{AD}||^2$, $b = ||\overrightarrow{AE}||^2$ positifs et de $c =< \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} >$ tel que $c^2 < ab$. Les hypothèses de la question 2 correspondent à $(a, b, c) = (3, 3, 3/2)$.
4. (sur 1) Soient (X, Y) les coordonnées de M dans (O, i, j), alors ses coordonnées dans (O, ai, bj) sont $(X/a, Y/b)$ donc $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Donc dans (E, ψ), $\mathcal{C}$ est une ellipse de centre O et d'axes dirigés par i et j. On peut remarquer de plus qu'elle est tangente à $(AB), (AC), (BC)$ en D, E, F, ce qui suffit amplement à la déterminer compètement (cf texte de L.Salle `http://picard.ups-tlse.fr/~bauval/Mapes28/ExamMai/Steiner.pdf`).