MAPES28 – Algèbre et Géométrie II, Examen de rattrapage du 26 juin 2008
Durée : 3h – Documents autorisés : notes de cours et de t.d.

Exercice 1. On se place dans un plan affine. Soient (A, B, C) un triangle non aplati et k un réel différent de 1. Démontrer qu'il existe un unique triangle (A', B', C') tel que

$$\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB'}, \qquad \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC'} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CA'},$$

en précisant les coordonnées barycentriques de A', B', C' dans le repère (A, B, C).

Exercice 2. On se place dans un plan affine euclidien. Soit C un cercle, de centre O et de rayon $R \neq 0$. On rappelle qu'une droite D passant par un point A de C est tangente à C si et seulement si D est perpendiculaire à (OA).

a) Soit D une droite passant par un point M du plan et coupant C en un point A. Montrer que D est tangente à C si et seulement si le point A est sur l'intersection de C avec le cercle de diamètre $[O, M]$. En déduire le nombre de tangente(s) à C passant par M, selon la position de M par rapport à C.

b) Soient k un réel non nul et f une dilatation de rapport k (c'est-à-dire une application affine telle que $\overrightarrow{f} = k\ \mathrm{id}$, autrement dit une homothétie si $k \neq 1$ ou une translation si $k = 1$). Montrer que $f(C)$ est le cercle de centre $f(O)$ et de rayon $|k|R$.

c) Soit C' un cercle distinct de C, de centre O' et de rayon $R' \neq 0$. Montrer qu'il existe exactement deux dilatations f_+ et f_- (de rapports respectifs R'/R et $-R'/R$) qui envoient C sur C'. Préciser leur centre (dans le cas d'une homothétie) ou vecteur (dans le cas d'une translation).

d) Soit D une tangente à C. Montrer que $f_+(D)$ et $f_-(D)$ sont exactement les deux tangentes à C' parallèles à D. En déduire la condition sur D (en termes de centre d'homothétie ou vecteur de translation vus précédemment) pour que D soit tangente à C'.

e) En déduire (suivant les positions respectives de C, C') le nombre de tangentes communes à ces deux cercles.

Exercice 3. On se place dans un plan affine euclidien P. Soient C, C', C'' trois cercles de centres O, O', O'' non alignés et de rayons R, R', R'' non nuls. La *puissance par rapport* à C d'un point M du plan est par définition $P_C(M) = OM^2 - R^2$. L'*axe radical* de C et C' est par définition l'ensemble $D_{C,C'}$ des points M tels que $P_C(M) = P_{C'}(M)$ (on va démontrer dans a) et b) que c'est une droite).

a) En notant $M_t = tO + (1-t)O'$ et en considérant l'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto P_C(M_t) - P_{C'}(M_t)$, montrer que $(OO') \cap D_{C,C'}$ est non vide.

b) Pour tout $H \in D_{C,C'}$, montrer que $D_{C,C'}$ est la perpendiculaire à (OO') passant par H.

c) Montrer que les trois droites $D_{C,C'}, D_{C',C''}, D_{C'',C}$ sont concourantes.

d) On suppose désormais que C, C', C'' sont sécants deux à deux et on note Δ la droite joignant les deux points de $C' \cap C''$, Δ' celle joignant les deux points de $C'' \cap C$ et Δ'' celle joignant les deux points de $C \cap C'$. Déduire de c) que ces trois droites sont concourantes.

e) On veut redémontrer d) par une autre méthode. On plonge pour cela le plan P dans un espace affine euclidien E de dimension 3, et on suppose par exemple $R \geq R', R''$. On choisit deux sphères de E de rayon R dont les intersections avec P soient C', C'', on note I, J leurs centres respectifs, et on note Π, Π', Π'' les plans médiateurs respectifs de $(I, J), (J, O), (O, I)$. Démontrer que ces trois plans ont une droite commune et intersectent P suivant les droites $\Delta, \Delta', \Delta''$. Conclure.