MAPES28 – Algèbre et Géométrie II, Examen de rattrapage du 26 juin 2008

Corrigé de l'examen de rattrapage du 26 juin 2008 (+ barème sur 30)

Exercice 1. (4 points) Remarquons d'abord que ces équations équivalent à

$$C' = kB' + (1-k)A, \qquad A' = kC' + (1-k)B, \qquad \text{et} \qquad B' = kA' + (1-k)C.$$

Unicité : de ces trois équations on tire
$B' = k(kC' + (1-k)B) + (1-k)C = k^2(kB' + (1-k)A) + k(1-k)B + (1-k)C =$
$k^3B' + k^2(1-k)A + k(1-k)B + (1-k)C$, d'où $B' = \frac{k^2(1-k)}{1-k^3}A + \frac{k(1-k)}{1-k^3}B + \frac{1-k}{1-k^3}C$, et par suite
$C' = \frac{k^3(1-k)}{1-k^3}A + \frac{k^2(1-k)}{1-k^3}B + \frac{k(1-k)}{1-k^3}C + (1-k)A = \frac{1-k}{1-k^3}A + \frac{k^2(1-k)}{1-k^3}B + \frac{k(1-k)}{1-k^3}C$ et
$A' = \frac{k(1-k)}{1-k^3}A + \frac{k^3(1-k)}{1-k^3}B + \frac{k^2(1-k)}{1-k^3}C + (1-k)B = \frac{k(1-k)}{1-k^3}A + \frac{1-k}{1-k^3}B + \frac{k^2(1-k)}{1-k^3}C$.
Existence : réciproquement, ces trois points A', B', C' vérifient bien $C' = kB' + (1-k)A$ et $A' = kC' + (1-k)B$ (par construction), et $kA' + (1-k)C =$
$\frac{k^2(1-k)}{1-k^3}A + \frac{k(1-k)}{1-k^3}B + \frac{k^3(1-k)}{1-k^3}C + (1-k)C = \frac{k^2(1-k)}{1-k^3}A + \frac{k(1-k)}{1-k^3}B + \frac{1-k}{1-k^3}C = B'$.
Remarques :

- on peut remplacer partout $\frac{1-k}{1-k^3}$ par $\frac{1}{1+k+k^2}$,
- les formules dans le cas $k = 0$ donnent bien la solution (immédiate) $(A', B', C') = (B, C, A)$

Exercice 2. (17 points)

a) (4 points) $D = (MA)$ est tangente à C ssi $(MA) \perp (OA)$ donc ssi A appartient au cercle de diamètre $[O, M]$. Les tangentes à C passant par M sont donc les droites (MA) quand A parcourt l'intersection de C avec ce cercle. Si M est intérieur à C cette intersection est vide (il n'y a aucune tangente à C issue de M), si M est sur C cette intersection est réduite à M (et il y a une tangente : la tangente en M à C), si M est extérieur à C cette intersection est une paire (il y a deux tangentes à C issues de M, orthogonalement symétriques par rapport à (OM)).

b) (1 point) $f(O)f(M) = |k|OM$, donc $M \in C \Leftrightarrow f(O)f(M) = |k|R$, i.e. $N \in f(C) \Leftrightarrow f(O)N = |k|R$.

c) (4 points) D'après b), une telle dilatation f avoir un rapport k tel que $R' = |k|R$, c'est-à-dire $k = \pm R'/R$, et doit de plus envoyer O sur O', ce qui complète sa détermination. Le seul cas où c'est une translation est f_+ dans le cas $R' = R$, et le vecteur est alors $\overrightarrow{OO'}$. Dans les autres cas, le centre Ω_+ de f_+ est donné par $\overrightarrow{O'\Omega_+} = (R'/R)\overrightarrow{O\Omega_+}$, i.e. $\overrightarrow{O\Omega_+} = \frac{R}{R-R'}\overrightarrow{OO'}$. De même (dans tous les cas) le centre Ω_- de f_- est donné par $\overrightarrow{O'\Omega_-} = -(R'/R)\overrightarrow{O\Omega_+}$, i.e. $\overrightarrow{O\Omega_-} = \frac{R}{R+R'}\overrightarrow{OO'}$.

d) (4 points) (On utilise deux fois que toute dilatation transforme une droite en une droite parallèle). Si D est tangente à C en A, $f_+(D)$ est une droite passant par $A_+ = f_+(A) \in C'$ et parallèle à D donc perpendiculaire à (OA), et $(O'A_+)$ est parallèle à (OA), donc $f_+(D)$ est perpendiculaire à $(O'A_+)$, donc est tangente à C' en A_+. Idem pour $f_-(D)$. De plus, $A_+ \neq A_-$ car $\overrightarrow{O'A_-} = -(R'/R)\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{O'A_+}$. Donc les deux tangentes à C' parallèles à D sont exactement $f_+(D)$ et $f_-(D)$. Or D est tangente à C ssi elle est égale à l'une de ces deux tangentes. Donc D est tangente à C ssi elle est (globalement) invariante par f_+ ou par f_- (et ces deux cas s'excluent mutuellement puisque $f_+(D) \neq f_-(D)$), donc ssi elle passe par soit Ω_+, soit par Ω_- (dans le cas particulier $R' = R$, il faut remplacer la condition "D passe par Ω_+" par "D est parallèle à (OO')").

e) (4 points) D'après la question a), pour trouver le nombre de tangentes communes à C, C' (c'est-à-dire le nombre de tangentes D à C vérifiant la condition ci-dessus), il faut (dans le cas général $R' \neq R$) étudier à la fois la position de Ω_+ et Ω_- par rapport à C.
Or $O\Omega_- > R \Leftrightarrow OO' > R + R'$ donc Ω_- est extérieur à C ssi C et C' sont strictement extérieurs l'un à l'autre (et $\Omega_- \in C$ ssi C et C' sont tangents extérieurement, et Ω_- est intérieur à C ssi C et C' sont sécants ou intérieur l'un à l'autre, avec tangence éventuelle).
De même $O\Omega_+ > R \Leftrightarrow OO' > |R - R'|$ donc Ω_+ est extérieur à C ssi C et C' sont sécants ou extérieur l'un à l'autre, avec tangence éventuelle (et $\Omega_+ \in C$ ssi C et C' sont tangents intérieurement, et Ω_+ est intérieur à C ssi l'un des deux cercles est strictement intérieur à l'autre).
En conclusion (si $R' \neq R$), le nombre de tangentes communes à C et C' est donc $2 + 2 = 4$ s'ils sont strictement extérieurs l'un à l'autre, $1 + 2 = 3$ s'ils sont tangents extérieurement, $0 + 2 = 2$ s'ils sont sécants, $0 + 1 = 1$ s'ils sont tangents intérieurement, $0 + 0 = 0$ si l'un est strictement intérieur à l'autre.
Dans le cas particulier $R' = R$, l'étude de la position de Ω_+ est remplacée par : C a toujours deux tangentes parallèles à (OO'). Le nombre de tangentes communes à C, C' est alors $2 + 2 = 4$ si C et C' sont strictement extérieurs l'un à l'autre, $1 + 2 = 3$ si C et C' sont tangents extérieurement, $0 + 2 = 2$ si C et C' sont sécants.

Exercice 3. (9 points)

a) (1 point) $P_C(M_t) - P_{C'}(M_t) = OM_t^2 - O'M_t^2 - R^2 + R'^2 = [(1-t)^2 - t^2]OO'^2 - R^2 + R'^2 = (1-2t)OO'^2 - R^2 + R'^2$ s'annule pour une (unique) valeur de t.

b) (2 points) On a $P_C(M) - P_C(H) = OM^2 - OH^2 = 2 < \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{HM} > + HM^2$ (et de même en remplaçant C par C' et O par O'), et $P_C(H) = P_{C'}(H)$, donc $P_C(M) = P_{C'}(M) \Leftrightarrow 2 < \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{HM} > + HM^2 = 2 < \overrightarrow{O'H}, \overrightarrow{HM} > + HM^2 \Leftrightarrow < \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{O'H}, \overrightarrow{HM} > = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp (OO')$.

c) (2 points) $D_{C,C'}$ et $D_{C',C''}$ sont sécantes (car perpendiculaires respectivement à (OO') et $(O'O'')$, qui sont sécantes car O, O', O'' non alignés). Soit Ω leur point d'intersection, on a $P_C(\Omega) = P_{C'}(\Omega) = P_{C''}(\Omega)$ donc $\Omega \in D_{C'',C}$.

d) (1 point) Les deux points de $C' \cap C''$ ont même puissance (nulle) par rapport à C' et C'', donc appartiennent à $D_{C',C''}$, donc $\Delta = D_{C',C''}$. Raisonnement analogue pour Δ', Δ''.

e) (3 points) Remarquons d'abord que O, I, J sont non alignés (comme leurs projetés orthogonaux sur P, O, O', O''), donc Π, Π' sont non parallèles (car perpendiculaires respectivement à $(IJ), (JO)$ qui sont sécantes). Soit donc D la droite $\Pi \cap \Pi'$. Tout point de D est équidistant de I et J, et équidistant de J et O, donc équidistant de I et O, donc $D \subset \Pi''$.
Π n'est pas parallèle à P (car sa normale (IJ) n'est pas perpendiculaire à P, car les projetés orthogonaux de I et J sur P, O' et O'', sont distincts), donc $\Pi \cap P$ est une droite. Les deux points de $C' \cap C''$ sont à même distance (R) de I et J, donc appartiennent à Π, donc à la droite $\Pi \cap P$, donc $\Delta = \Pi \cap P$. De même, $\Delta' = \Pi' \cap P$ et $\Delta'' = \Pi'' \cap P$.
La droite D commune à Π, Π', Π'' est non parallèle à P, car D est orthogonale au plan (OIJ) qui n'est pas perpendiculaire à P (car le projeté orthogonal sur $\overrightarrow{P}$ d'un vecteur non nul de la forme $\lambda\overrightarrow{OI} + \mu\overrightarrow{OJ}$ est $\lambda\overrightarrow{OO'} + \mu\overrightarrow{OO''} \neq 0$). Donc D coupe P en un point Ω. D'après ce qui précède, Ω appartient à $\Delta, \Delta', \Delta''$.