Ce sujet comporte deux parties. La première contient plusieurs questions vues en TD. La deuxième partie utilise fortement les résultats de la première. On a largement indiqué dans les questions de la deuxième partie quels résultats préliminaires sont à utiliser. Le sujet est long et on pourra obtenir la note maximale sans le traiter intégralement.
Dans tout ce devoir, $\mathcal{E}$ désigne un plan affine, et $\overrightarrow{E}$ son espace vectoriel directeur. On suppose cet espace vectoriel muni d'une structure euclidienne et d'une orientation. On note $O(\overrightarrow{E})$ le sous-groupe des isométries de $\mathbf{GL}(\overrightarrow{E})$, et $O^+(\overrightarrow{E})$ le sous-groupe des isométries directes, c'est-à-dire le sous-groupe des rotations vectorielles.

1 Préliminaires.

1.1 Isométries affines.

1. Montrer que l'application suivante est surjective :

$$\Pi : \begin{array}{ccc} \mathbf{GA}(\mathcal{E}) & \to & \mathbf{GL}(\overrightarrow{E}) \\ u & \mapsto & \overrightarrow{u} \end{array}$$

On rappelle que c'est un morphisme de groupes dont le noyau est par définition $T_{\mathcal{E}}$, le sous-groupe des translations de $\mathcal{E}$. On notera $t_{\overrightarrow{v}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
2. Montrer que $\Pi^{-1}(O^+(\overrightarrow{E}))$ est un sous-groupe de $\mathbf{GA}(\mathcal{E})$.

On le notera $\mathbf{Is}^+(\mathcal{E})$ le groupe $\Pi^{-1}(O^+(\overrightarrow{E}))$ (groupe des isométries affines directes). On appelle rotation (affine) tout élément de $\mathbf{Is}^+(\mathcal{E})$ ayant un point fixe. On appelle angle d'une rotation affine l'angle, dans $[0, 2\pi[$, de sa partie vectorielle.

3. Montrer qu'une rotation distincte de l'identité admet un unique point fixe. On appelle centre de la rotation ce point fixe.
4. Soit u un élément de $\mathbf{Is}^+(\mathcal{E})$. Montrer que, pour tout point $C \in \mathcal{E}$, il existe un unique couple $(t_{\overrightarrow{v}}, r)$, où $t_{\overrightarrow{v}}$ est une translation et r une rotation de centre C tels que $u = t_{\overrightarrow{v}} \circ r$. Montrer qu'un point $M = C + \overrightarrow{x}$ est fixe par u si et seulement si $(\overrightarrow{u - id})(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{v}$. En déduire que tout élément de $\mathbf{Is}^+(\mathcal{E})$ est soit une rotation soit une translation.

1.2 Composition de rotations.

Soient r et r' deux rotations non triviales, de centres respectifs C et C', d'angles respectifs θ et θ'.

5. Décrire $r' \circ r$ si $C = C'$. On suppose désormais $C \neq C'$.
6. Montrer que, si $\theta + \theta' \equiv 0 \bmod (2\pi)$, alors $r' \circ r$ et $r \circ r'$ sont des translations. Exprimer les vecteurs de ces translations sous la forme $\overrightarrow{CM}$ (avec M à préciser). En déduire que r et r' ne commutent pas.
7. Montrer qu'il existe un couple $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ de vecteurs unitaires, formant un angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2}) = \theta$, et tels que la droite dirigée par $\overrightarrow{CC'}$ **passant par C** soit bissectrice de cet angle. Montrer que le couple $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, où $\mathcal{D}_i$ est la droite dirigée par $\overrightarrow{u}_i$ passant par C, est unique. Faire un dessin.

On se donne ce couple de droites, et le couple analogue $(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2)$ centré en C', d'angle orienté θ'.

8. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- (i) $t_{\overrightarrow{CC'}}(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}'_1$.
- (i') $t_{\overrightarrow{CC'}}(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}'_2$.
- (ii) $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_1$ sont parallèles.
- (ii') $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}'_2$ sont parallèles.
- (iii) $\theta + \theta' \equiv 0 \mod (2\pi)$.

9. On suppose maintenant $\theta + \theta' \not\equiv 0 \mod (2\pi)$, et on se donne des points d'intersection $A = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}'_2$ et $B = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}'_1$. Compléter le dessin de la question 7. Montrer que $r' \circ r$ et $r \circ r'$ sont des rotations dont on précisera les centres et angles. En déduire qu'ici aussi, r et r' ne commutent pas.
10. Montrer que le commutateur $r \circ r' \circ r^{-1} \circ r'^{-1}$ de deux rotations non triviales n'ayant pas même centre est une translation non triviale.

1.3 Conjugaison.

11. Soit $t_{\overrightarrow{v}}$ une translation et $u \in \mathbf{Is}^+(\mathcal{E})$. Montrer que $u \circ t \circ u^{-1}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{v})$.
12. Soit $u \in \mathbf{Is}^+(\mathcal{E})$ et r une rotation non triviale de centre C, montrer que $u \circ r \circ u^{-1}$ est une rotation de centre $u(C)$ et de même angle que $\cancel{u}$ r.

2 Les groupes de paveurs.

L'espace affine $\mathcal{E}$ peut être identifié à $\mathbf{R}^2$ muni de sa topologie usuelle, et a donc une structure topologique. On rappelle qu'une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. On rappelle qu'une partie est discrète si elle n'intercepte chaque compact qu'en au plus un nombre fini de points.

On suppose dorénavant donné P un compact connexe de $\mathcal{E}$, d'intérieur $\overset{\circ}{P}$ non vide (c'est-à-dire contenant une boule ouverte), et un sous-groupe $G \subset \mathbf{Is}^+(\mathcal{E})$ agissant sur $\mathcal{E}$ et vérifiant :

$\cup_{g \in G} g(P) = \mathcal{E}$. recouvrement (**A**)
$\forall g, h \in \cancel{\mathcal{E}} G, g(\overset{\circ}{P}) \cap h(\overset{\circ}{P}) \neq \emptyset \Rightarrow g = h$. non chevauchement (**B**)
$\forall A \in \mathcal{E}, \{g(A)/g \in G\}$ est une partie discrète et fermée de $\mathcal{E}$. (**C**)

Dans une telle situation, on dit que le couple (P, G) est un **pavage du plan**. L'objet du problème est d'obtenir des informations sur les sous-groupes de $\mathbf{Is}^+(\mathcal{E})$ qui peuvent être un groupe de paveurs.
Le point **(C)** est en fait une conséquence des points **(A)** et **(B)** (ceci ne sera pas démontré dans ce problème). Cela signifie que vous pourrez utiliser le point **(C)** quand on vous donne un pavage (P, G), et que vous n'aurez qu'à démontrer les points **(A)** et **(B)** quand on vous demande de vérifier que (P, G) est un pavage.

13. Soit $P = (ABCD)$ un parallélogramme dans $\mathcal{E}$, et G le sous-groupe du groupe des translations engendré par les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Montrer que (P, G) est bien un pavage du plan (*indication : on pensera à la partie entière*).

2.1 Le sous-groupe des translations.

On note Γ le sous-groupe $G \cap T_{\mathcal{E}}$ des translations de G. On l'identifiera librement au sous-groupe de $\overrightarrow{E}$ des vecteurs de ces translations.

2.1.1 Montrons que Γ est non trivial.

Supposons au contraire que Γ est trivial.

14. En utilisant **(A)**, montrer que G contient deux rotations n'ayant pas même centre.
15. Conclure (*indication : question 10*).

2.1.2 Montrons que Γ contient deux vecteurs linéairement indépendants.

Supposons au contraire que les vecteurs des éléments de Γ appartiennent à une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ de $\overrightarrow{E}$.

16. Si $G = \Gamma$, montrer que $\cup_{g \in G} g(P)$ est inclus dans une bande de direction $\overrightarrow{D}$. En déduire que $\Gamma \subsetneq G$ (par **(A)**).
17. Soit $u \in G - \Gamma$ et $t \in \Gamma$ non trivial. Montrer que $\overrightarrow{u}$ est une symétrie centrale (rotation d'angle π) (*indication : question 11*). Montrer que les centres des éléments de $G - \Gamma$ sont alignés (*indication : question 6*).
18. En déduire que $\cup_{g \in G} g(P)$ est inclus dans une bande de direction $\overrightarrow{D}$, et conclure par **(A)**.

2.1.3 Montrons que le groupe Γ est discret.

19. Par l'hypothèse **(C)**, montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x}$ de plus petite norme parmi les vecteurs non nuls de Γ, et $\overrightarrow{y}$ un vecteur de plus petite norme parmi les vecteurs de Γ non colinéaires à $\overrightarrow{x}$.
20. Supposons qu'il existe une translation $t \in \Gamma$ qui n'est pas dans $\mathbf{Z}\overrightarrow{x} + \mathbf{Z}\overrightarrow{y}$. Par un argument de division euclidienne, obtenir une contradiction avec la définition du couple $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. En déduire :

$$\Gamma = \mathbf{Z}\overrightarrow{x} + \mathbf{Z}\overrightarrow{y}.$$

2.2 Les rotations de G.

21. Soit $u \in G - \Gamma$. En utilisant la question 11, montrer que la matrice de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ de $\overrightarrow{E}$ est à coefficients entiers. En déduire que la trace de $\overrightarrow{u}$ est un entier. Quelle est la trace d'une rotation en fonction de son angle ? En déduire que $\overrightarrow{u}$ est d'ordre fini égal à 2, 3, 4, ou 6, puis qu'il en est de même de u.
22. On se place dans le cas particulier où $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ n'ont pas même norme. Montrer que $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x}$, et en déduire que $\overrightarrow{u} =\not- \overrightarrow{id}$.

2.2.1 Groupe $\mathbf{Z}^2 \ltimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

On suppose ici que toutes les rotations de G sont des symétries centrales.

23. Soit C un centre d'une symétrie de G. Montrer que l'ensemble des centres des symétries de G est $C + \frac{1}{2}\Gamma$ (*indication : on procèdera par double inclusion, et on utilisera la question 4 pour l'inclusion réciproque*). Dessiner un exemple de pavage obtenu avec un tel groupe

G (*indication : partir d'un carré* $(ABCD)$, *et prendre pour* Γ *le groupe engendré par les translations de vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *et* $2\overrightarrow{AC}$. *Il vous reste à placer les centres de symétries*).

2.2.2 Les autres cas.

Soit $r \in G$ une rotation, de centre A, d'ordre $\alpha \geq 3$ et d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$. On admet qu'il existe une rotation $s \in G$, de centre B, d'ordre β et d'angle $\frac{2\pi}{\beta}$ telle que le centre B soit le plus proche de A parmi les centres des rotations non triviales de G. Attention, dans cette partie, t désignera une ~~translation~~ rotation qu'on introduit à la question suivante.

24. Montrer que $t = (r \circ s)^{-1} \in G$ est une rotation, dont on note C le centre. Montrer que les angles (non orientés) du triangle (ABC) sont moitié de ceux des rotations r, s et t (*indication : questions 7 et 9*).
25. Soit γ l'ordre de t. On veut montrer que l'angle de t est $\frac{2\pi}{\gamma}$. Supposons qu'il soit de la forme $\frac{2n\pi}{\gamma}$ avec $2 \leq n \leq \gamma - 1$, et $pgcd(n, \gamma) = 1$. Montrer que la rotation t' de centre C et d'angle $\frac{2\pi}{\gamma}$ appartient à G. Construire le centre de la rotation $t' \circ r$ (faire un dessin en s'inspirant des questions 7 et 9) et en déduire une contradiction avec le choix de B.
26. Déduire des deux questions précédentes :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1.$$

Donner tous les triplets (α, β, γ) d'entiers naturels avec $\alpha \geq 3$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 2$ et vérifiant cette relation.

On se limite dorénavant au cas $\alpha = \beta = \gamma = 3$. On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de norme 1. Quelle est la nature du triangle (ABC) ?

27. Montrer que $s^2 \circ r$ et $t^2 \circ r$ sont des translations dont on écrira les vecteurs T_1 et T_2 dans la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Faire un dessin (on notera $D = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, et $F = A + T_2$).
28. On souhaite montrer que $\Gamma = \mathbf{Z}T_1 + \mathbf{Z}T_2$. Pour cela, montrer que l'application $\overrightarrow{r - id}$ est une similitude vectorielle, c'est-à-dire conserve l'orthogonalité. En calculant son déterminant dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, trouver son rapport. Conclure en utilisant la question 4, la section 2.1 et la définition de B.
29. Montrer que $((ABCD), < \Gamma, t >)$ vérifie l'axiome **(A)** (*indication : on note* E *et* H *les sommets non encore introduits de l'hexagone régulier centré en* C *dont* A, B, D *et* F *sont des sommets. On commencera par recouvrir cet hexagone*).
30. On souhaite montrer que toutes les rotations d'ordre ≥ 3 sont obtenues comme conjuguées d'une des rotations r, r^2, s, s^2, t ou t^2 par un élément de Γ. Soit donc une telle rotation W. Montrer qu'il existe une rotation W_1 conjuguée à W par des éléments de Γ, et dont le centre C_1 est dans $(ABDEFH)$. Montrer qu'une telle rotation est t, r, s, une puissance de celles-ci, ou une conjuguée de celles-ci par T_1 ou T_2 et conclure.
31. En déduire que toute rotation dans G est d'ordre 3. Montrer qu'il existe une surjection $G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, dont le noyau est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$.