1. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbf{GL}(\overrightarrow{E})$. Soit $O \in \mathcal{E}$. Un antécédent de $\overrightarrow{u}$ par Π est $u(O + \overrightarrow{x}) = O + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$.
2. L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe.
3. Si C un point fixe, l'équation aux points fixes est $C + \overrightarrow{x} = u(C + \overrightarrow{x}) = C + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$, qui n'a pas de solution non nulle puisque $\overrightarrow{u}$ est une rotation vectorielle non triviale (et n'admet pas 1 comme valeur propre).
4. On choisit pour r la rotation de centre C : $r(C+\overrightarrow{x}) = C+\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$. On pose $t = u \circ r^{-1}$. Un calcul direct montre $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{id}$, c'est donc une translation. Ceci montre l'existence. L'unicité provient de l'égalite $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{r}$: r est l'unique application affine fixant C de partie vectorielle $\overrightarrow{u}$. Et t est uniquement déterminé à partir de u et r. Un point $M = C+\overrightarrow{x}$ est fixe par u si et seulement si $C+\overrightarrow{x} = u(C)+\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) = C+\overrightarrow{t}+\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})-\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{t}$. Supposons que u n'est pas une translation, alors $\overrightarrow{u}$ est une rotation vectorielle non triviale, n'admet pas 1 comme valeur propre, donc $\overrightarrow{u - id}$ est un isomorphisme. L'équation précédente admet une (unique) solution, et donc u admet un (unique) point fixe. u est alors une rotation de centre ce point fixe.
5. Si r et r' sont deux rotations de même centre C et d'angles θ et θ', alors $r' \circ r$ est la rotation de centre C d'angle $\theta + \theta'$.
6. On calcule la partie vectorielle : $\overrightarrow{r' \circ r} = \overrightarrow{r'} \circ \overrightarrow{r}$ est une rotation vectorielle d'angle $\theta + \theta' \equiv 0 \bmod 2\pi$, donc l'identité ici. Ainsi $r' \circ r$ est une translation. De même pour $r \circ r'$. $r' \circ r(C) = r'(C)$ donc $r' \circ r$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{Cr'(C)}$, alors que $r \circ r'$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{Cr \circ r'(C)}$. Si r et r' commutaient, on aurait $r'(C) = r \circ r'(C)$, donc $r'(C)$ serait égal à C l'unique point fixe de r, puis $r'(C) = C$ donnerait $C = C'$ l'unique point fixe de r'. C'est exclu par hypothèse.
7. On se place dans un (le) repère orthonormé direct dont la première composante est portée (et dirigée) par $\overrightarrow{CC'}$, et (α_1, β_1), (α_2, β_2) les coordonnées de $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ dans ce repère. Le couple $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ est solution si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

La première relation donne $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_1 = -\beta_2$. La deuxième devient alors un système linéaire de deux équations à deux inconnues, non trivial, de déterminant nul. Il existe donc une droite vectorielle de solutions. Puisque $\overrightarrow{u}_1$ est unitaire, cela donne deux solutions (qui sont en fait échangées par symétrie centrale), chacune engendrant la même droite vectorielle.
8. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. $t_{\overrightarrow{CC'}}\mathcal{D}_2$ est la droite de direction $\overrightarrow{D}_2$ passant par C'. Puisque $\overrightarrow{D}'_1$ passe par C', on a bien l'équivalence souhaitée. De même $(i') \Leftrightarrow (ii')$. $(i) \Leftrightarrow (i')$ se montre en appliquant aux parties vectorielles la symétrie orthogonale d'axe (CC'). $(ii) + (ii)' \Rightarrow (iii)$: on a le calcul $\overrightarrow{r}_{-\theta}(\overrightarrow{D}_2) = \overrightarrow{D}_1 = \overrightarrow{D}'_2 = \overrightarrow{r}_{\theta'}\overrightarrow{D}'_1 = \overrightarrow{r}_{\theta'}\overrightarrow{D}_2$, qui montre que la rotation d'angle $\theta + \theta'$ est l'identité, d'où (iii). $(iii) \Rightarrow (ii)$ Puisque $\theta' = -\theta \bmod (2\pi)$, $(\widehat{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2}) = \theta$, on a l'égalité $(\widehat{\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1}) = \theta'$, la propriété de bissection est vérifiée, et le couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)$ est solution au problème de la question 8 adapté à C'. Par unicité, le parallélisme s'en déduit.
9. En considérant la partie vectorielle, qui est non triviale, on voit que $r \circ r'$ et $r' \circ r$ sont des rotations. On trouve $r(A) = B$. En effet, puisque $s(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$, $s(\mathcal{D}'_1) = \mathcal{D}'_2$, et par les définitions de A et B, on voit que $s(A) = B$. Or, par définition des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, s et r coïncident sur ces droites, donc $r(A) = s(A) = B$. De même $r'(B) = A$, ce qui montre que A est le centre de $r' \circ r$, et B celui de $r \circ r'$. Les angles sont $\theta + \theta'$ pour les deux rotations.

A est distinct de B (sinon, le quadrilatère $(ACBC')$ serait aplati, et on aurait $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}'_2$ confondues). Deux rotations n'ayant pas même centre sont distinctes, cela montre que r et r' ne commutent pas.

10. $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$ et $r^{-1} \circ r'^{-1}$ une rotation d'angle $-(\theta + \theta')$. Leurs centres sont distincts, d'après la question 6, leur composée est une translation non triviale.

11. Le calcul suivant montre la propriété attendue : $u \circ t \circ u^{-1}(C + \overrightarrow{x}) = u \circ t(u^{-1}(C) + \overrightarrow{u}^{-1}(\overrightarrow{x})) = u(u^{-1}(C) + \overrightarrow{u}^{-1}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{t}) = u \circ u^{-1}(C) + \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u}^{-1}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{t}) = C + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{t})$.

12. On voit que $u \circ r \circ u^{-1}$ a pour partie vectorielle $\overrightarrow{r}$, donc est une rotation. Un simple calcul montre que $u(C)$ est fixe.

---

13. Notons t_1 et t_2 les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Montrons que le point (A) est vérifié. Soit M un point de $\mathcal{E}$ et (x, y) ses coordonnées dans le repère affine $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Alors M est l'image d'un point de P par $[x]t_1 + [y]t_2$, où $[.]$ désigne la partie entière. Soit maintenant $T_1 = x_1t_1 + y_1t_2 \in G$ et $T_2 = x_2t_1 + y_2t_2 \in G$ (avec donc $x_i, y_i \in \mathbf{Z}$) tels qu'il y ait un point M dans $T_1(\overset{\circ}{P}) \cap T_2(\overset{\circ}{P})$. Les coordonnées de M sont donc d'une part de la forme $(x_1 + a_1, y_1 + b_1)$, avec $0 < a_1 < 1$, et $0 < b_1 < 1$, d'autre part de la forme $(x_2 + a_2, y_2 + b_2)$, avec $0 < a_2 < 1$, et $0 < b_2 < 1$. On a donc l'égalité $x_1 + a_1 = x_2 + a_2$, puis $x_1 - x_2 = a_2 - a_1$ est entier. D'après les inégalités sur les a_i, il est nul, donc $x_1 = x_2$. De même $y_1 = y_2$, et donc $T_1 = T_2$.

14. Si toutes les rotations de G avaient même centre C, les images de P par ces rotations seraient incluses dans une certaine boule centrée en C (en fait, dans n'importe quelle boule centrée en C contenant P), et ne pourraient pas recouvrir $\mathcal{E}$.

15. Le commutateur de deux rotations n'ayant pas même centre est une translation non triviale, ce qui est une contradiction.

16. Sous les hypothèses faites, $\cup_{g \in G} g(P) \subset P + \mathcal{D}$, qui est une bande de direction $\mathcal{D}$ strictement incluse dans $\mathcal{E}$. La déduction est claire.

17. $u \circ t \circ u^{-1}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{t})$, contenue dans Γ, donc $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{t})$ est colinéaire à $\overrightarrow{t}$. La rotation $\overrightarrow{u}$ admet donc une valeur propre réelle, elle est non triviale, c'est donc $-\overrightarrow{id}$. La composée de deux symétries centrales dans G (de centres C et C') est une translation de G de vecteur $2\overrightarrow{CC'}$, ces centres sont sur la droite passant par C de direction $\overrightarrow{D}$.

18. On considère une bande centrée sur $C + \overrightarrow{D}$ et suffisamment large pour contenir P. Alors G consevre cette bande, donc les images de P restent incluses dans cette bande et ne peuvent recouvrir $\mathcal{E}$.

19. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\{t(A)/t \in \Gamma\}$ est discret et fermé comme partie d'un espace discret et fermé. Soit une boule fermée centrée en A et contenant au moins un autre point de cet ensemble. Par compacité et discrétion, la boule contient un nombre fini de points de cet ensemble, il en est donc un tel que la norme $||\overrightarrow{AB}||$ soit minimale. Ceci donne $\overrightarrow{x}$. De même pour l'obtention de $\overrightarrow{y}$.

20. Puisque $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est libre, c'est une base de $\overrightarrow{E}$. Un vecteur $\overrightarrow{t}$ d'une translation $t \in \Gamma$ s'écrit $a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y}$. Alors $\overrightarrow{u} = (a - [a])\overrightarrow{x} + (b - [b])\overrightarrow{y} \in \Gamma$. Prenons un point A, et $B = A + \overrightarrow{x}$, $C = A + \overrightarrow{y}$, $D = A + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. Alors, soit $A + \overrightarrow{u}$ est dans le triangle (ABC) (c'est-à-dire barycentre de A, B, C à coefficients positifs), et c'est une contradiction avec la définition de $\overrightarrow{x}$ ou de $\overrightarrow{y}$, soit il est dans le triangle (BCD), et dans ce cas $A + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$ est dans le symétrique par rapport à A du triangle (ABC) et c'est une contradiction.

21. La question 11 montre que $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$ et $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{y})$ sont encore des vecteurs de translation de G, et s'écrivent donc $a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y}$ et $c\overrightarrow{x} + d\overrightarrow{y}$ respectivement, avec a, b, c, d entiers. La matrice de $\overrightarrow{u}$ dans cette base est $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. La trace de $\overrightarrow{u}$ est donc entière. Or, la trace d'une rotation est $2\cos\theta$, où θ est l'angle de la rotation. Puisque la trace est invariante par conjugaison, on en déduit que $2\cos\theta$ est entier, donc $\cos\theta \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$, et donc $\theta \in \{-\pi, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3}, 0\}$ (on exclut 0 comme $u \notin \Gamma$ est non triviale), puis que l'ordre de $\overrightarrow{u}$ est $2, 3, 4$ ou 6.

22. Si $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ n'ont pas même norme, alors $\overrightarrow{x}$ et $-\overrightarrow{x}$ sont les seuls vecteurs de norme minimale parmi les vecteurs de Γ. Comme $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$ est un vecteur de Γ de même norme que $\overrightarrow{x}$, il s'agit de $\pm\overrightarrow{x}$. Puisque la rotation $\overrightarrow{u}$ admet ± 1 comme valeur propre, on a $\overrightarrow{u} = \pm\overrightarrow{id}$, et donc $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{id}$ puisque $u \notin \Gamma$.

23. En composant deux symétries centrales de centres C et C', on obtient une translation de vecteur $2\overrightarrow{CC'} \in \Gamma$. Ainsi, $C' \in C + \frac{1}{2}\Gamma$. Réciproquement, soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur d'une translation t dans Γ. On souhaite montrer que $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$ est le centre d'une symétrie centrale de G : d'après la question 4, $t \circ s$ convient (c'est une symétrie centrale et son centre est $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$).

24. La somme des angles de r et s vérifie $0 < \frac{2\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\beta} < 2\pi$, donc, d'après la question 9, $r \circ s$, et donc t sont des rotations. D'après la question 9, les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ du triangle (ABC) sont moitié de ceux des rotations r et s. En échangeant les rôles, on déduit la même propriété sur l'angle $\hat{C}$ et la rotation t.

25. Si t est d'ordre γ, alors toutes les rotations de même centre et d'angle $\frac{2k\pi}{\gamma}$, pour γ entier, sont une puissance de t (car les puissances de t sont de cette forme, et il y en a γ distinctes). En particulier, t' la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\gamma}$ et de centre C est dans G. Mais alors, en appliquant la construction des questions 7 et 9 à la composée $t' \circ r$, on obtient deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant par C et deux droites $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ passant par A. *On voit sur le dessin* (la raison est que l'angle de t' est plus petit que celui de t, et, en particulier, plus petit que π) que la droite $\mathcal{D}_2$ est tracée dans le secteur angulaire centré en C et délimité par (AC) et (BC), donc coupe la droite (BC) en un point situé sur le segment $[BC]$. Ce point est le centre de la rotation $t' \circ r$. On a donc exhibé un centre d'une rotation de G qui est plus proche de A que B : c'est une contradiction.

26. La somme des angles d'un triangle est π. La relation $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$ montre qu'au plus un des entiers vaut 2. Si $\gamma = 2$, $\alpha = \beta = 4$ et $\alpha = 6$, $\beta = 3$ sont solutions, et on remarque qu'il n'y a pas de solution pour les autres valeurs de α. Si $\gamma = 3$, on voit que $\alpha = \beta = 3$ est solution, et qu'il n'y a pas de solution pour les autres valeurs de α. Les triplets sont donc $(3, 3, 3)$, $(4, 4, 2)$ et $(6, 3, 2)$.

27. Le triangle (ABC) est équilatéral. Leurs parties linéaires sont triviales donc $s^2 \circ r$ et $t^2 \circ r$ sont des translations. $s^2 \circ r(A)$ est l'image de A par la rotation centrée en C et d'angle $\frac{4\pi}{3}$. C'est donc l'unique point D tel que $ABDC$ soit un losange. Ainsi $s^2 \circ r$ a pour vecteur $T_1 = \overrightarrow{A(s^2 \circ r)(A)} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. De même $t^2 \circ r$ a pour vecteur $T_2 = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

28. Si $< x, y >= 0$, alors :

$$< \overrightarrow{r - id}(x), \overrightarrow{r - id}(y) >= - < \overrightarrow{r}(x), y > - < x, \overrightarrow{r}(y) >$$

$$= - < x, \overrightarrow{r}(y) + \overrightarrow{r}^2(y) >= - < x, -y >= 0,$$

en se servant de ce que $\overrightarrow{r}$ est une isométrie, donc admet pour adjoint $\overrightarrow{r}^{-1}$, et des relations $\overrightarrow{r}^{-1} = \overrightarrow{r}^2$ et $\overrightarrow{r}^2 + \overrightarrow{r} + \overrightarrow{id} = 0$, qui proviennent de l'angle de r. La matrice de $\overrightarrow{r - id}$ dans $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ qui a pour déterminant 3. Le rapport de la similitude est donc $\sqrt{3}$. Soit $T_{\overrightarrow{v}}$ une translation dans Γ. Puisque Γ est engendré par n'importe quel couple de vecteurs non liés de normes minimales (partie 2.1), il suffit de voir que la norme de $\overrightarrow{v}$ est plus grande que celles de T_1 et T_2. Mais, d'après la question 4, le vecteur $-\overrightarrow{v}$ est image directe par $\overrightarrow{r-id}$ d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ tel que $A+\overrightarrow{x}$ est centre de $T\circ r$. D'après la définition de B, on a $||\overrightarrow{x}|| \geq 1$, donc, puisque $\overrightarrow{r-id}$ est une similitude de rapport $\sqrt{3}$, on a $||\overrightarrow{v}|| \geq \sqrt{3}$. Un calcul direct (hauteur d'un triangle équilatéral) montre $||T_1|| = ||T_2|| = \sqrt{3}$, et on conclut.

29. En posant $F' = A+T_1+T_2$, les images par Γ du parallélogramme $(ADF'F)$ recouvrent $\mathcal{E}$ par la question 13. Or, les images de l'hexagone $(ABDEFH)$ par id, T_1 et T_2 recouvrent ce parallélogramme. Enfin cet hexagone est exactement l'union des images de $(ABDC)$ par id, t et t^2.

30. D'après la question 29, il existe un élément de Γ qui translate le centre de W dans $(ABDEFH)$. Cette translation conjugue W à une rotation W_0 dont le centre est dans $(ABDEFH)$ d'après la question 12. Les rotations t, t^2, r, s, r^2, s^2, et les conjugués de ces quatre dernières par T_1 et T_2 répondent effectivement à la question. S'il y a une rotation centrée en un autre point de l'hexagone que A, B, C, D, E, F, H, ce point est strictement plus proche de C que A et B, et par conjugaison par une translation, on en déduit un centre de rotation strictement plus proche de A que B, ce qui est en contradiction avec la définition de B. S'il y a dans G une rotation non triviale centrée en un des sommets ou en le centre de l'hexagone et d'ordre $\neq 3$, on en déduit une rotation d'ordre > 3, et toujours quitte à translater, on construit comme à la question 25 un centre de rotation strictement plus proche de A que B et c'est encore une contradiction.

31. L'ordre d'un élément est stable par conjugaison, et toutes les rotations listées précédemment sont d'ordre 3. L'image de G par Π est donc constituée uniquement de l'identité et des rotations vectorielles d'angles respectifs $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$: c'est un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Le noyau de Π restreint à G est le groupe Γ dont on a vu qu'il est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$.