Durée : 4h. Calculatrices autorisées. Les deux parties sont indépendantes. Justifiez toute réponse.

I. Décomposition polaire

$(E, \langle , \rangle)$ désignera un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Un endomorphisme symétrique f (c'est-à-dire tel que $f^* = f$) est dit positif si et seulement si $\forall x \in E, \langle f(x), x\rangle \geq 0$.

a) (Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif)

i) Démontrer qu'un endomorphisme symétrique est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont ≥ 0.

ii) En déduire que pour tout endomorphisme symétrique positif f, il existe v symétrique positif tel que $f = v \circ v$.

iii) Montrer de plus qu'un tel v est unique.

b) Soit h un endomorphisme quelconque de E. On pose $f = h^* \circ h$.

i) Démontrer que f est symétrique et positif. Dans toute la suite on notera v l'unique endomorphisme symétrique positif tel que $f = v \circ v$ (cf a).

ii) Vérifier que $\forall x, y \in E$, $< v(x), v(y) >=< h(x), h(y) >$ et $\|v(x)\| = \|h(x)\|$. En déduire que $Ker(v) = Ker(h)$.

iii) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $v(e_i) = \|h(e_i)\|e_i$.

c) On suppose dans cette question que h est bijectif (donc v aussi d'après b.ii).

i) Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme w tel que $h = w \circ v$ et vérifier que ce w est orthogonal.

ii) Déduire de b.iii) une expression de $w(e_i)$ en fonction de $h(e_i)$.

iii) Application : soit $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Trouver deux matrices V symétrique et W orthogonale telles que $H = WV$.

d) On ne suppose plus que h est bijectif, et on ordonne la base $(e_1, \dots, e_n)$ de b.iii) de telle sorte que $h(e_1), \dots, h(e_p)$ soient non nuls et $h(e_{p+1}), \dots, h(e_n)$ soient nuls.

i) Comment faut-il choisir $w(e_1), \dots, w(e_n)$ pour définir un endomorphisme orthogonal w tel que $h = w \circ v$? Un tel w est-il unique ?

ii) Application : soit $H = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Trouver deux matrices V symétrique et W orthogonale telles que $H = WV$.

II. Décomposition QR.

Soit A une matrice réelle inversible de taille n. $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

a) Méthode de Schmidt

Soient $\mathcal{B}'$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$,
$\mathcal{B}''$ la b.o.n. de $\mathbf{R}^n$ construite à partir de $\mathcal{B}'$ par l'algorithme de Gram-Schmidt(*),
R la matrice de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}''$,
Q la matrice de $\mathcal{B}''$ dans $\mathcal{B}$.

i) Montrer (brièvement) que Q est orthogonale.

ii) Montrer que R est triangulaire supérieure.

iii) Quelle équation relie A, Q, R ?

b) Méthode de Householder

Pour tout vecteur non nul v, on pose $s_v(x) = x - \frac{2<v,x>}{\|v\|^2}v$, et $H_v =$ la matrice de s_v dans la base canonique. Les matrices H_v ainsi obtenues sont appelées matrices de Householder de taille n.

i) Démontrer que s_v est une réflexion(**).

ii) Démontrer que si H est une matrice de Householder de taille $n-k$ alors $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$ est une matrice de Householder de taille n (I_k désignant la matrice identité de taille k).

iii) Soient e un vecteur unitaire et x un vecteur non nul. On pose $v = x + \alpha e$ avec $\alpha = \pm\|x\|$. Montrer que $s_v(x) = -\alpha e$. En choisissant convenablement e, x et α, montrer qu'il existe une matrice de Householder Q_1 (de taille n) telle que $Q_1 A$ soit de la forme $\begin{pmatrix} -\alpha & L \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, avec A_1 matrice inversible de taille $n-1$.

iv) En déduire (en précisant t) un algorithme permettant de construire des matrices de Householder $Q_1, \ldots, Q_t$ (de taille n) telles que $R := Q_t \ldots Q_1 A$ soit triangulaire supérieure.

v) Quelle équation relie alors A, R, et $Q := Q_1 \ldots Q_t$?

c)

i) Quelles matrices sont à la fois triangulaires et orthogonales ? Montrer qu'elles sont produits de matrices de réflexions (**). En déduire (par b) que tout endomorphisme orthogonal est un produit de réflexions.

ii) (Hors barème) Quelles matrices sont à la fois triangulaires et orthogonales et à termes diagonaux > 0 ? En déduire (en améliorant b.iv) que tout endomorphisme orthogonal est produit d'un nombre $\leq n$ de réflexions.

(*) Rappel sur Gram-Schmidt pour la question a : pour toute base $(u_1, \ldots, u_n)$ d'un e.v. euclidien E, il existe une unique base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que pour tout k, $v_k \in Vect(u_1, \ldots, u_k)$ et $\langle v_k, u_k \rangle > 0$.

(**) Précision pour les questions b.i et c : une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.