I. Décomposition polaire (sur 18)

a) (Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif)

i) (2 pts) Soit f symétrique. Si f est positif alors pour toute valeur propre λ et tout vecteur propre $x \neq 0$ associé, $0 \leq \langle f(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2$, or $\|x\|^2 > 0$, donc $\lambda \geq 0$. Réciproquement si les valeurs propres de f sont toutes ≥ 0, soient (puisque f est symétrique) $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée propre et λ_i (≥ 0) tels que $f(e_i) = \lambda_i e_i$, alors pour tout $x \in E$, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans cette base, $\langle f(x), x\rangle = \langle \sum x_i\lambda_i e_i, \sum x_j e_j\rangle = \sum x_i\lambda_i x_j\delta_{i,j} = \sum x_i^2\lambda_i \geq 0$ donc f est positif.

ii) (1 pt) Soient f symétrique positif, et λ_i, e_i comme ci-dessus. Soit v l'endomorphisme de E défini par $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i}e_i$. Alors v est symétrique positif et $v \circ v = f$.

iii) (1 pt) Soit v un endomorphime symétrique positif tel que $v \circ v = f$. Notons $(F_\mu)_{\mu\in S}$ et $(G_\lambda)_{\lambda\in T}$ les familles de sous-espaces propres pour v et f. Alors $F_\mu \subset G_{\mu^2}$, or $\oplus_{\mu\in S}F_\mu = E = \oplus_{\lambda\in T}G_\lambda$, donc $T = \{\mu^2 \mid \mu \in S\}$ et $G_{\mu^2} = F_\mu$, donc $S = \{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in T\}$ et $F_{\sqrt{\lambda}} = G_\lambda$, ce qui détermine entièrement v.

b)

i) (2 pts) f est symétrique car $f^* = h^*\circ(h^{**}) = h^*\circ h = f$, et positif car $\langle f(x), x\rangle = \langle h^*(h(x)), x\rangle = \langle h(x), h(x)\rangle \geq 0$.

ii) (1 pt) Plus généralement, $\langle f(x), y\rangle = \langle h^*(h(x)), y\rangle = \langle h(x), h(y)\rangle$, et de même en rempaçant h par v (puisque $v^* \circ v = v \circ v = f$), d'où $< v(x), v(y) >=< h(x), h(y) >$, en particulier $\|v(x)\|^2 = \|h(x)\|^2$, en particulier $v(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$.

iii) (1 pt) Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée propre pour v et μ_i tels que $v(e_i) = \mu_i e_i$, alors $\|h(e_i)\| = \|v(e_i)\| = \|\mu_i e_i\| = \mu_i$, donc $v(e_i) = \|h(e_i)\|e_i$.

c)

i) (2 pts) $h = w \circ v \Leftrightarrow w = h \circ v^{-1}$ (d'où l'existence et l'unicité de w) et ce w est orthogonal car $\forall x \in E, \|w(x)\| = \|h(v^{-1}(x))\| =$ (d'après b.ii) $\|v(v^{-1}(x))\| = \|x\|$.

ii) (1 pt) $h(e_i) = w(v(e_i)) = w(\|h(e_i)\|e_i) = \|h(e_i)\|w(e_i)$ (et $h(e_i) \neq 0$ par injectivité de h) donc $w(e_i) = h(e_i)/\|h(e_i)\|$.

iii) (3 pts) $H^TH = 10\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ donc $V = \sqrt{10}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et

$W = HV^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2&-1&4&-2\\2&1&4&2\\-4&2&2&-1\\-4&-2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} =$

$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\1&1&2&2\\-2&2&1&-1\\-2&-2&1&1\end{pmatrix}$.

d)

i) (1 pt) On veut que les $w(e_i)$ forment une b.o.n. (pour que w soit orthogonal) et vérifient $\forall i, h(e_i) = w(v(e_i)) = w(\|h(e_i)\|e_i)$ i.e. $\forall i \leq p, w(e_i) = \frac{h(e_i)}{\|h(e_i)\|}$. Il faut donc prendre $w(e_1), \dots, w(e_p)$ donnés par cette formule, et choisir $w(e_{p+1}), \dots, w(e_n)$ de telle sorte que $(w(e_1), \dots, w(e_n))$ soit une b.o.n. (ceci généralise le cas $p = n$ de c, mais pour $p < n$ le choix n'est évidemment pas unique).

ii) (4 pts) $H^TH = 9\begin{pmatrix}4&-2&4\\-2&1&-2\\4&-2&4\end{pmatrix}$ a pour noyau (comme H) le plan d'équation $2x - y + 2z = 0$, i.e. le plan $u^\perp$ avec $u = (2, -1, 2)$. Par conséquent la droite $\mathbf{R}u$ doit être elle aussi stable par H^TH, i.e. u doit être propre pour H^TH. Effectivement, le calcul donne $H^THu = 81u$. Donc V est la matrice qui envoie $u^\perp$ sur 0 (comme

$H^T H$) et t.q. $Vu = 9u = H^T H u/9$, d'où $V = H^T H/9 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Pour $e_1 = u/\|u\| = (2,-1,2)/3$ on a $He_1 = 3(2,1,-2)$. On cherche donc W orthogonale t.q. $We_1 = He_1/\|He_1\| = (2,1,-2)/3 = f_1$. La méthode générale serait de choisir une b.o.n. (e_2, e_3) de $u^\perp$ puis de choisir f_2, f_3 t.q. (f_1, f_2, f_3) soit une b.o.n. et de déterminer W t.q. $W(e_i) = f_i$. Mais en remarquant que f_1 n'est autre que le symétrique orthogonal de e_1 par rapport à la droite $y = z = 0$, on peut choisir simplement pour W cette symétrie : $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

II. Décomposition QR. (sur 12)

a) Méthode de Schmidt

i) (0,5 pt) Q est la matrice d'une b.o.n. $\mathcal{B}''$ dans une b.o.n. $\mathcal{B}$.

ii) (1 pt) En notant $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathcal{B}'' = (v_1, \dots, v_n)$, $Vect(u_1, \dots, u_k)$ contient les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ donc contient le sous-espace qu'ils engendrent, et est de même dimension, donc égal, en particulier $u_k \in Vect(v_1, \dots, v_k)$, donc R est triangulaire supérieure.

iii) (1 pt) Pour tout j, $\sum_i A_{i,j} e_i = u_j = \sum_k R_{k,j} v_k = \sum_k R_{k,j} (\sum_i Q_{i,k} e_i)$ donc pour tous i, j, $A_{i,j} = \sum_k Q_{i,k} R_{k,j}$ donc $A = QR$.

b) Méthode de Householder

i) (1 pt) $x \mapsto \frac{<v,x>}{\|v\|^2} v$ est la projection orthogonale sur $\mathbf{R}v$ donc s_v est la réflexion d'hyperplan $v^\perp$.

ii) (1 pt) Si H est la matrice de s_u avec $u = (u_{k+1}, \dots, u_n)$ alors $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$ est la matrice de s_v avec $v = (0, \dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_n)$.

iii) (2 pts) $< v, x >= \|x\|^2 + \alpha < e, x >= \alpha^2 + \alpha < e, x >$ et $\|v\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha < x, e > + \alpha^2 = 2(\alpha^2 + \alpha < e, x >)$ donc $2 < v, x > /\|v\|^2 = 1$ donc $s_v(x) = x - v = -\alpha e$. Soient e le premier vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et x le premier vecteur colonne de A (non nul puisque A est inversible). Si $x = \|x\| e$ on choisit $\alpha = \|x\|$, si $x = -\|x\| e$ on choisit $\alpha = -\|x\|$, si x n'est pas colinéaire à e on choisit indifféremment $\alpha = \pm\|x\|$. De cette manière on a toujours $v := x + \alpha e \neq 0$, et en prenant pour Q_1 la matrice de s_v, $Q_1 A$ a pour première colonne $s_v(x) = -\alpha e$ donc est de la forme voulue.

iv) (2 pts) Supposons construites $Q_1, \dots, Q_k$ telles que $Q_k \dots Q_1 A$ soit de la forme $\begin{pmatrix} T_k & U_k \\ 0 & A_k \end{pmatrix}$ avec T_k triangulaire supérieure de taille k et A_k de taille $n - k$ (inversibles). Si $k = n - 1$, A_k est de taille 1 donc $Q_k \dots Q_1 A$ est triangulaire. Donc $t = n - 1$. Si $k < n - 1$, il existe une matrice de Householder Q'_{k+1} de taille $n - k$ telle que $Q'_{k+1} A_k$ soit de la forme $\begin{pmatrix} -\alpha_k & L_k \\ 0 & A_{k+1} \end{pmatrix}$, avec A_{k+1} de taille $n - k - 1$, d'où (par ii) une matrice de Householder Q_{k+1} telle que $Q_{k+1} \dots Q_1 A = \begin{pmatrix} T_{k+1} & U_{k+1} \\ 0 & A_{k+1} \end{pmatrix}$ avec T_{k+1} triangulaire supérieure.

v) (1 pt) Par définition de R et Q et d'après i, $A = Q_1^{-1} \dots Q_t^{-1} R = Q_1 \dots Q_t R = QR$.

c)

i) (3 pts) Si R est triangulaire (par exemple supérieure) et orthogonale, les termes diagonaux sont égaux à ± 1 donc les autres termes sont 0. S'il y a k termes diagonaux égaux à -1, R est le produit de k matrices diagonales dont chacune comporte une fois -1 et $n - 1$ fois 1, donc R est produit de k matrices de réflexion. Si on applique b à une matrice de départ A qui est orthogonale, la matrice triangulaire $R = Q^T A$ sera orthogonale donc de cette forme, donc sera (comme Q) produit de réflexions, donc $A = QR$ aussi.

ii) D'après ce qui précède, la seule matrice qui soit à la fois triangulaire et orthogonale et à termes diagonaux > 0 est I. Si on améliore b.iv en choisissant simplement $Q_{k+1} = I$ lorsque A_k est déjà de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_k & L_k \\ 0 & A_{k+1} \end{pmatrix}$ avec $\lambda_k > 0$, on peut dans tous les autres cas choisir $\alpha_k < 0$, si bien que la matrice triangulaire R obtenue aura tous ses termes diagonaux > 0 sauf peut-être le dernier, ce que l'on peut corriger en complétant si nécessaire par un Q_n supplémentaire. Si on était partis d'une matrice A orthogonale, on aura alors $R = I$ donc $A = Q = Q_1 \dots Q_n$, où chaque Q_i est soit I, soit une matrice de réflexion.