CORRIGÉ DES 2 EXOS DU PARTIEL DE L'AN DERNIER

Exercice 1.

1. Inutile de réduire, échelonner suffit. Par $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, le système équivaut à $2x + z = a, -y + 3z = b + 2a, y - 3z = c - 3a$. Puis par $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ il équivaut à $2x + z = a, -y + 3z = b + 2a, 0 = b + c - a$. Il est donc de rang 2.
2. Si $b+c-a \neq 0$, $S(a,b,c) = \emptyset$. Si $b+c-a = 0$, $S(a,b,c) = \{((a-z)/2, 3z-b-2a, z) \mid z \in \mathbf{R}\}$.
3. Si $S(a,b,c)$ est un s.e.v. de $\mathbf{R}^3$ alors il contient le vecteur nul $(0,0,0)$, donc $b + c - a = 0$ et $(a-0)/2 = 3.0 - b - 2a = 0$, donc $a = 2.0 = 0, b = -2a = 0, c = a - b = 0$. Réciproquement, $S(0,0,0)$ est bien un s.e.v. de $\mathbf{R}^3$, car c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. (On peut même préciser : $S(0,0,0) = \{(-z/2, 3z, z) \mid z \in \mathbf{R}\} = \mathcal{V}ect((-1/2, 3, 1))$ est une droite vectorielle).

Exercice 2.

1. $F_1 \cap F_2 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbf{R}, z = t = 0 \text{ et } y = z = 0\} = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathcal{V}ect(E_{1,1})$ (où $E_{i,j}$ désigne la matrice qui comporte un 1 en ligne i, colonne j et des 0 partout ailleurs). De plus, $E_{1,1} \neq 0$ donc $(E_{1,1})$ est libre. C'est donc une base de $F_1 \cap F_2$, qui est donc de dimension 1.
2. $F_1 + F_2 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \exists a, b, c, d \in \mathbf{R}, x = a + c, y = b, z = 0, t = d\} = \{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid x, y, t \in \mathbf{R}\} = \mathcal{V}ect(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$. De plus, $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est libre (c'est un sous-système de la base canonique de E). C'est donc une base de $F_1 + F_2$, qui est donc de dimension 3.
3. Une matrice peut appartenir à $F_1 + F_2$ sans appartenir à F_1 ni à F_2, c'est-à-dire peut être de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$ sans que t ni y soit nul. Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $F_1 \cup F_2$ n'est donc pas un s.e.v., puisqu'il n'est pas stable par $+$.
3. $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est une base de $F_1 + F_2$ et $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, E_{2,1})$ est une base de E. Donc $(E_{2,1})$ est une base d'un supplémentaire dans E de $F_1 + F_2$. Ce supplémentaire est donc de dimension 1. On peut le préciser : $Vect(E_{2,1}) = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R}\}$.