Université Paul Sabatier
L1 - UE02 IMM

Deuxième semestre 2007-2008

# Partiel d'algèbre linéaire.

*Durée 2h.*
*Documents et calculatrices non autorisés.*

Chaque réponse devra être soigneusement argumentée. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif.

**Questions de cours** (*5 points*)

1. Soit $E$ un espace vectoriel, $F_1, F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Démontrer que l'intersection $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. Soit $F$ un autre espace vectoriel et $f : E \to F$ une application. Que signifie "$f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$" ?

**Exercice 1.** (*6 points*) On considère le système linéaire suivant où $a, b, c$ sont des paramètres réels :

$$\begin{cases} 2x & & + & z & = & a \\ -4x & - & y & + & z & = & b \\ 6x & + & y & & & = & c \end{cases}$$

On note $S(a,b,c)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ des solutions du système pour les valeurs $a, b, c$ des paramètres.

1. Mettre le système sous forme échelonnée ou réduite et donner le rang du système.
2. Déterminer $S(a,b,c)$ en fonction des valeurs des paramètres $a, b$ et $c$. (C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$).
3. Existe-t-il $a, b, c$ tels que $S(a,b,c)$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ? Si oui, donner les valeurs correspondantes.

**Exercice 2.** (*9 points*) Soit $E$ l'ensemble des matrices $2 \times 2$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit les sous-espaces vectoriels $F_1$ et $F_2$ de la façon suivante :

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} ; c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(On ne demande pas de démontrer que $E$ est un espace vectoriel, ni que $F_1$ et $F_2$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$.)

1. Décrire les matrices qui sont dans l'intersection $F_1 \cap F_2$. Expliciter une base de $F_1 \cap F_2$ et donner sa dimension.
2. Décrire les matrices de la somme $F_1 + F_2$. Expliciter une base de $F_1 + F_2$ et donner sa dimension.
3. Donner un exemple de matrice de $(F_1 + F_2) \setminus (F_1 \cup F_2)$. L'ensemble $F_1 \cup F_2$ est-il un sous-espace vectoriel ?
4. Déterminer un supplémentaire dans $E$ de $F_1 + F_2$. Quelle est sa dimension ?