Devoir 3 (dimension et rang)

Exercice 1. Soient m, n entiers naturels.

1) Quelles sont (en fonction de m, n) les valeurs possibles r du rang d'une matrice à m lignes et n colonnes ? Pour chacune de ces valeurs r, donner (sans fixer m, n) un exemple simple d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ de rang r.

2) Soit $R \in \mathcal{M}_{m,n}$ une matrice échelonnée réduite, de rang r (i.e. comportant r pivots), de colonnes $C_1, \ldots, C_n \in \mathbf{R}^m$, de lignes $L_1, \ldots, L_m \in \mathbf{R}^n$.
   a) Quelle est la dimension de $\mathcal{V}ect(C_1, \ldots, C_n)$?
   b) Démontrer, par ailleurs, que la dimension de $\mathcal{V}ect(L_1, \ldots, L_m)$ est r.
   c) En déduire le rang de la matrice transposée $R^t \in \mathcal{M}_{n,m}$ (dont les m colonnes sont les éléments $L_1, \ldots, L_m$ de $\mathbf{R}^n$)

3) Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B = A^t \in \mathcal{M}_{n,m}$.
   a) Montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires des m colonnes de B est égal à $\{BX \mid X \in \mathcal{M}_{m,1}\}$. En déduire que pour tout $H \in GL_m$, les sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ engendrés respectivement par les colonnes de B et par celles de BH sont égaux.
   b) En déduire que $rang(A) = rang(A^t)$.
   Indication : soit $G \in GL_m$ telle que GA soit échelonnée réduite, poser $R = GA, H = G^t$, et utiliser que $(GA)^t = A^t G^t$ et que $G \in GL_m \Rightarrow G^t \in GL_m$.

4) En déduire que le rang de A est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes.

Exercice 2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, $C = (\,A \quad B\,) \in \mathcal{M}_{m,2n}(\mathbf{R})$, $E = \mathbf{R}^m$, $C_1, \ldots, C_n \in E$ les colonnes de A, $C'_1, \ldots, C'_n \in E$ celles de B, $F = \mathcal{V}ect(C_1, \ldots, C_n)$ et $G = \mathcal{V}ect(C'_1, \ldots, C'_n)$ les deux sous-espaces vectoriels de E correspondants, r_A, r_B, r_C les rangs des matrices A, B, C.

1) Démontrer que la dimension de $F + G$ est égale à r_C.

   Désormais,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2)
   a) Extraire de (C_1, C_2, C_3) une base de F et en déduire r_A.
   b) Calculer de même r_B.
   c) Calculer de même r_C.
   d) En déduire la dimension de $F \cap G$.
   e) La somme $F + G$ est-elle directe ?

3) Vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient à $F \cap G$, puis expliciter $F \cap G$ (en utilisant sa dimension).