CORRIGÉ DU DEVOIR 3 (DIMENSION ET RANG)

Exercice 1.

1) Quelle que soit la définition choisie pour le rang (nombre de pivots d'une réduite, ou dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes), on a $0 \leq r \leq \min(m,n)$. (cf "définition" 2.2.3, ou théorème 4.4.1 et remarque 4.4.2). Inversement, pour tout entier r compris entre 0 et $\min(m,n)$, la matrice (écrite par blocs) $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$ (où $0_{p,q}$ désigne la matrice nulle à p lignes et q colonnes) appartient à $\mathcal{M}_{m,n}$ et est de rang r.

2.a) D'après la proposition 4.4.1 (sans même utiliser que R est réduite), $\dim(\mathcal{V}ect(C_1,\ldots,C_n)) = rang(R)$ (où la définition choisie pour le rang d'une matrice est ici la première : nombre de pivots d'une réduite). Cette proposition dit qu'en fait les deux définitions du rang d'une matrice sont équivalentes, ce qui donne un sens la première.

2.b) La famille $(L_1,\ldots,L_r)$ est génératrice de $\mathcal{V}ect(L_1,\ldots,L_m)$ (car les autres lignes sont nulles). Il suffit donc de prouver qu'elle est libre. Soient $j_1,\ldots,j_r$ les numéros des colonnes des pivots. La colonne numéro j_k comporte un 1 sur la k-ième ligne et des 0 ailleurs, donc pour tous réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, dans $\sum_{i=1}^r \lambda_i L_i$, le j_k-ième terme est égal à λ_k, donc si $\sum_{i=1}^r \lambda_i L_i = 0$, tous les λ_k sont nuls.

2.c) Vue la définition de R^t, son rang est r d'après la question précédente.

3.a) En notant $C_1,\ldots,C_m$ les colonnes de B, on a $\sum_{i=1}^m x_i C_i = B\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}$, donc l'ensemble des combinaisons linéaires de $C_1,\ldots,C_m$ est $\{BX \mid X \in \mathcal{M}_{m,1}\}$. De même, l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de BH est $\{BHY \mid Y \in \mathcal{M}_{m,1}\}$. Le second est clairement inclus dans le premier, car $BHY = BX$ pour $X = HY$. Le premier est inclus dans le second, car $BX = BHY$ pour $Y = H^{-1}X$.

3.b) Soit (avec les notations indiquées) $r = rang(R) = rang(A)$. D'après la question 2), $r = rang(R^t) = rang(BH)$ donc d'après la question 3.a), $r = rang(B) = rang(A^t)$.

4) Le rang de A est égal au rang de A^t, donc à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A^t, qui sont les lignes de A.

Exercice 2.

1) $F + G$ est égal à l'ensemble de tous les $u + v$ avec u combinaison linéaire de $C_1,\ldots,C_m$ et v combinaison linéaire de $C'_1,\ldots,C'_m$, donc est égal à l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $C_1,\ldots,C_m,C'_1,\ldots,C'_m$, qui sont les colonnes de C. Donc $r_C = dim(F+G)$.

2.a) Par exemple (C_1,C_2) est libre et $C_3 = C_2 - C_1$. Donc (C_1,C_2) est une base de F, donc $r_A = dim(F) = 2$.

2.b) Par exemple, (C'_1,C'_2) est libre et $C'_3 = \frac{1}{2}(C'_1 + C'_2)$. Donc de même, $r_B = 2$.

2.c) Par exemple, (C_1,C_2,C'_2) est libre et $C_3 = C_2 - C_1, C'_1 = C_2/2, C'_3 = \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{2}C'_2$. Donc par le même raisonnement, $r_C = 3$.

2.d) $dim(F \cap G) = dim(F) + dim(G) - dim(F+G) = r_A + r_B - r_C = 1$.

2.e) La somme $F + G$ n'est pas directe, puisque $F \cap G$ est de dimension 1 donc non réduit à 0.

3) Notons V ce vecteur. On a $V = C_2/2 = C'_1 \in F \cap G$ et $V \neq 0$, donc (V) est un système libre de $F \cap G$, donc une base de $F \cap G$ puisque $F \cap G$ est de dimension 1. Donc $F \cap G = \{\lambda V \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$.