UPS, Licence MIA Math-Méca 3ème semestre, TD d'algèbre 2,
Feuille 6 (décembre 2007) CORRIGE

Exercice 1. Considérons l'espace vectoriel $E = M_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer qu'en posant $(M|N) = trace(M^t.N)$ on définit un produit scalaire sur E.

b) Soit $P \in GL_n(\mathbf{R})$. Calculer l'adjoint de l'endomorphisme u de E défini par $u(M) = P^{-1}MP$.
Solution :

a) $(\bullet|\bullet)$ *est bilinéaire par linéarité de la transposition, bilinéarité du produit, et linéarité de l'application trace. Elle est symétrique car* $(N|M) = trace(N^t.M) = trace(M^t.N) = (M|N)$ *(en appliquant la propriété* $trace(A^t) = trace(A)$ *à* $A = M^t.N$*). Montrons qu'elle est définie positive.* $\forall M, N \in E, (M|N) = \sum_j (M^t.N)_{j,j} = \sum_{i,j} M^t_{j,i} N_{i,j} = \sum_{i,j} M_{i,j} N_{i,j}$*, en particulier* $(M|M) = \sum_{i,j} M^2_{i,j} > 0$ *dès que* $M \neq 0$.

b) u^* *est défini par* $\forall M, N \in E, (M|u^*(N)) = (u(M)|N)$
$= (P^{-1}MP|N) = trace(P^t.M^t.(P^{-1})^t.N)$*, qu'il s'agit donc de mettre sous la forme*
$(M|?) = trace(M^t.?)$*. A cet effet, appliquons la propriété* $trace(AB) = trace(BA)$ *à* $A = P^t$ *et* $B = M^t.(P^{-1})^t.N$*. Ainsi,* $(M|u^*(N))$ *devient*
$trace(M^t.(P^{-1})^t.N.P^t) = (M|(P^{-1})^t.N.P^t)$*, autrement dit*
$\forall N \in E, u^*(N) = (P^{-1})^t.N.P^t = Q^{-1}NQ$ *pour* $Q = P^t$.

Exercice 2. Réduction de Gauss, noyau, rang, signature des formes quadratiques

$q_1(x, y, z) = 6x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8xy - 8xz - 6yz,$

$q_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx),$

$q_3(x_1, \dots, x_5) = \sum_{i<j} x_i x_j,$

$q_4(x_1, \dots, x_5) = \sum_{i<5} x_i x_{i+1}.$
Solution :

a) $q_1(x, y, z) = 6x^2 - 8x(y + z) + 3y^2 + 3z^2 - 6yz =$
$6[x - \frac{2}{3}(y + z)]^2 - \frac{8}{3}(y + z)^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6yz =$
$6[x - \frac{2}{3}(y + z)]^2 + \frac{1}{3}(y^2 + z^2 - 34yz) =$
$6[x - \frac{2}{3}(y + z)]^2 + \frac{1}{3}[(y - 17z)^2 + (1 - 17^2)z^2]$
donc q_1 *est de noyau* $\{0\}$*, de rang* 3*, de signature* $(2, 1)$.

b) $q_2(x, y, z) = x^2 - 2x(y+z) + y^2 + z^2 - 2yz = (x-y-z)^2 - 4yz = (x-y-z)^2 - (y+z)^2 + (y-z)^2$
donc q_2 *est de noyau* $\{0\}$*, de rang* 3*, de signature* $(2, 1)$.

c) $q_3(x_1, \dots, x_5) = x_1x_2 + x_1(x_3 + x_4 + x_5) + x_2(x_3 + x_4 + x_5) + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 =$
$(x_1 + x_3 + x_4 + x_5)(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (x_3 + x_4 + x_5)^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 =$
$\frac{1}{4}[(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)^2 - (x_1 - x_2)^2] - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5 =$
$\frac{1}{4}[(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)^2 - (x_1 - x_2)^2] - x_3^2 - x_3(x_4 + x_5) - x_4^2 - x_5^2 - x_4x_5 =$
$\frac{1}{4}[(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)^2 - (x_1 - x_2)^2] - (x_3 + \frac{x_4+x_5}{2})^2 + \frac{(x_4+x_5)^2}{4} - x_4^2 - x_5^2 - x_4x_5 =$
$\frac{1}{4}[(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)^2 - (x_1 - x_2)^2] - (x_3 + \frac{x_4+x_5}{2})^2 - \frac{3}{4}(x_4^2 + x_5^2 + 2x_4x_5/3) =$
$\frac{1}{4}[(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)^2 - (x_1 - x_2)^2] - (x_3 + \frac{x_4+x_5}{2})^2 - \frac{3}{4}[(x_4 + \frac{x_5}{3})^2 + 8x_5^2/9]$
donc q_3 *est de noyau* $\{0\}$*, de rang* 5*, de signature* $(1, 4)$*. Généralisation (par une autre méthode) en dimension* $n \geq 2$ *(cf aussi exo 4) :* $q(x) = \sum_{i<j} x_i x_j$ *a pour matrice* $S/2$ *avec* $S_{i,j} = 0$ *si* $i = j$*,* 1 *si* $i \neq j$*.* $S(x) = \lambda x \Leftrightarrow \forall i, \lambda x_i = \sum_{j \neq i} x_j \Leftrightarrow \forall i, (\lambda + 1)x_i = \sum x_j$*. Les valeurs propres de* S *sont donc* -1 *(d'hyperplan propre* $\sum x_j = 0$*) et* $n - 1$ *(de droite propre* $x_1 = \ldots = x_n$*). La signature de* q *est donc* $(1, n - 1)$.

d) $q_4(x_1,\dots,x_5)=(x_1+x_3)x_2+(x_3+x_5)x_4=$
$\frac14[(x_1+x_3+x_2)^2-(x_1+x_3-x_2)^2+(x_3+x_5+x_4)^2-(x_3+x_5-x_4)^2]$ *donc* q_4 *est de rang* 4*, de signature* $(2,2)$*, et de noyau la droite d'équations* $0=x_2=x_4=x_1+x_3=x_3+x_5$*, engendrée par le vecteur* $(1,0,-1,0,1)$.

Exercice 3. (Exercice 1, sur 5 points, de l'examen de janvier 2006) On considère sur $\mathbf{R}^3$ la forme quadratique $Q(x,y,z)=a^2x^2+(1-a)y^2+(2-a)z^2-2axy+2axz+2(a-1)yz$ où a est un paramètre réel.

a) En utilisant l'algorithme de Gauss, écrire Q comme une "somme" de carrés de formes linéaires indépendantes.

b) En déduire le rang et la signature de Q.
Solution.

a) *(En général - sauf si* Q *est positive - ce n'est pas vraiment une "somme", mais au mieux une combinaison linéaire à coefficients égaux à* ±1*).* $Q(x,y,z)=a^2x^2+2ax(z-y)+(1-a)y^2+(2-a)z^2+2(a-1)yz=(ax+z-y)^2-ay^2+(1-a)z^2+2ayz=(ax+z-y)^2-a(y^2-2yz)+(1-a)z^2=(ax+z-y)^2-a(y-z)^2+z^2$ *(les trois formes linéaires ne sont indépendantes que si* $a\neq0$*).* *Si* $a=0$, $Q(x,y,z)=(z-y)^2+z^2$.

b) *Lorsque* $a\neq0$*, le rang vaut donc* 3 *et la signature est* $(2,1)$ *si* $a>0$, $(3,0)$ *si* $a<0$*. Lorsque* $a=0$*, le rang vaut* 2 *et la signature* $(2,0)$.

Exercice 4. (Exercice 2, sur 5 points, de l'examen de janvier 2006) Sur $\mathbf{R}^n$ avec $n\geq2$ et avec la notation $x=(x_1,\dots,x_n)$, on considère la forme quadratique $Q(x)=\sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{i+j}x_ix_j$.

a) Soient ℓ la forme linéaire $\ell(x)=\sum_{1\leq i\leq n}(-1)^ix_i$ et H l'hyperplan $\mathrm{Ker}(\ell)$.

   i) Démontrer que $\ell^2(x)=\sum_{1\leq i\leq n}x_i^2+2Q(x)$.

   ii) Démontrer que si $x\in H\setminus\{0\}$ alors $Q(x)<0$.

b) En déduire la signature de Q.
Solution.

a)

   i) $\ell^2(x)=(\sum_{1\leq i\leq n}(-1)^ix_i)(\sum_{1\leq j\leq n}(-1)^jx_j)=Q(x)+R(x)+S(x)$ *avec*
   $R(x)=\sum_{1\leq i=j\leq n}(-1)^{i+j}x_ix_j=\sum_{1\leq i\leq n}x_i^2$ *et*
   $S(x)=\sum_{1\leq j<i\leq n}(-1)^{i+j}x_ix_j=\sum_{1\leq i'<j'\leq n}(-1)^{j'+i'}x_{j'}x_{i'}=Q(x)$, d'où $\ell^2=R+2Q$.

   ii) *Si* $x\in H\setminus\{0\}$, $2Q(x)=0^2-R(x)<0$.

b) *On en déduit que la signature de* Q *est* (p,q) *avec (cf plus bas)* $q\geq n-1$ *et* $p+q=\mathrm{rang}(Q)\leq n$*. Par ailleurs,* $p>0$ *(car* Q *n'est pas négative, vu que* $Q(1,-1,0,\dots,0)=1$*). D'où* $(p,q)=(1,n-1)$.
Justification de "$q\geq n-1$*" (c'est censé être du cours mais redémontrons-le). Soient* $e_1,\dots,e_n$ *une base dans laquelle* Q *s'écrit* $\sum_1^py_i^2-\sum_{p+1}^{p+q}y_i^2$*, et* H *un s.e.v. sur lequel* Q *est définie négative. Comme* Q *est définie positive sur* $Vect(e_1,\dots,e_p)$*, ces deux sous-espaces sont en somme directe et* Q *est non dégénérée sur cette somme, donc* $\dim H+p\leq\mathrm{rang}(Q)=p+q$*, donc* $\dim H\leq q$.
Remarque (autre méthode) : la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée a pour valeurs propres $-1/2$ *(d'ordre* $n-1$*, d'hyperplan associé* H*) et* $\frac{n-1}{2}$ *(d'ordre* 1*, de droite associée* $H^\perp$*). Ou encore :* $Q(x)=q(s(x))$ *où* q *est la forme quadratique étudiée dans l'exercice 1.c et* s *est la symétrie orthogonale définie par* $s(x)=((-1)^ix_i)_{1\leq i\leq n}$*. Les matrices*

symétriques associées à Q et q ont donc mêmes valeurs propres (et les sous-espaces propres de l'une sont les transformés par s de ceux de l'autre), donc même signature.