UPS, Licence MIA Math-Méca 3ème semestre, TD d'algèbre 2, Feuille 5 (décembre 2007) CORRIGE

Exercice 1.

a) Montrer que $< P, Q >= \int_0^\infty e^{-t}P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$ (l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2).

b) Donner la matrice de ce produit scalaire dans la base $1, X, X^2$.

c) Trouver a tel que $\int_0^\infty e^{-t}(t-a)^2dt$ soit minimal.
Solution.

a) *Remarquons d'abord que* $< \, , \, >$ *est bien défini sur* $\mathbf{R}_2[X]$ ($\forall k \in \mathbf{N}, I_k := \int_0^\infty e^{-t}t^k dt < +\infty$). *Il est évidemment bilinéaire et symétrique. Il est défini positif car pour toute fonction continue* $f \geq 0$ *différente de la fonction nulle (en particulier pour* $f(t) = e^{-t}P^2(t)$ *avec* P *polynôme non nul),* $\int_0^\infty f(t)dt > 0$.

b) *A l'aide d'une intégration par parties, on montre par récurrence que* $I_k = k!$.
D'où $< X^i, X^j >= (i+j)!$.

c) a *est le projeté orthogonal de* X *sur* $\mathbf{R}$, *i.e.* $0 =< X - a, 1 >= 1 - a$.

Exercice 2. Soit $C([0,1])$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Soit $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$, $\forall f, g \in C([0,1])$. Montrer que c'est un produit scalaire sur $C([0,1])$. Trouver le projeté orthogonal de la fonction e^t sur le sous-espace vectoriel engendré par 1 et t.
Solution. C'est un produit scalaire : comme dans l'exercice précédent. Le projeté cherché est $at+b$ *avec* $0 =< e^t - at - b, 1 >= e - 1 - a/2 - b$ *et* $0 =< e^t - at - b, t >= 1 - a/3 - b/2$, *d'où* $a = 18 - 6e$ *et* $b = 4e - 10$.

Exercice 3. On munit $\mathbf{R}^4$ de sa structure euclidienne usuelle. Trouver une base orthonormale du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,2,3,0)$, $v_3 = (0,0,4,1)$.
Solution (procédé d'orthonormalisation de Schmidt). $e_1 = v_1/\sqrt{2}$.
$e_2 = \lambda v_1 + \mu v_2$ *avec*
$0 =< e_2, v_1 >= \lambda < v_1, v_1 > +\mu < v_2, v_1 >= 2\lambda + 2\mu$ *i.e.* $\mu = -\lambda$,
$1 = \|e_2\|^2 = \lambda^2\|v_1 - v_2\|^2 = 11\lambda^2$ *i.e.* $\lambda = \pm 1/\sqrt{11}$,
$0 << e_2, v_2 >= \lambda < v_1 - v_2, v_2 >= -11\lambda$ *i.e.* $\lambda > 0$, *donc*
$e_2 = (v_2 - v_1)/\sqrt{11} = (-1,1,3,0)/\sqrt{11}$.
$e_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ *avec*
$0 =< e_3, v_1 >=< e_3, v_2 >$ *i.e.* $0 = 2\alpha + 2\beta = 2\alpha + 13\beta + 12\gamma$ *i.e.* $(\alpha, \beta, \gamma) = \delta(12, -12, 11)$,
$1 = \|e_3\|^2 = \delta^2\|12v_1 - 12v_2 + 11v_3\|^2 = \delta^2\|(12,-12,8,11)\|^2 = 473\delta^2$ *i.e.* $\delta = \pm 1/\sqrt{473}$,
$0 << e_3, v_3 >= \delta < (12,-12,8,11), v_3 >= 43\delta$ *i.e.* $\delta > 0$, *donc* $e_3 = (12,-12,8,11)/\sqrt{473}$.

Exercice 4. Soit $(E, < \, , \, >)$ un espace euclidien. Etant donnés un vecteur non nul u de E et un réel λ, on pose $f(x) = x + \lambda < x, u > u$, $\forall x \in E$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Trouver les $\lambda \in \mathbf{R}$ tels que f soit orthogonal.

c) On suppose $\lambda \neq 0$ et f orthogonal.

   i) Calculer $f(u)$.

   ii) Calculer $f(x)$ pour $x \perp u$.

   iii) Diagonaliser f.
   Solution (question a immédiate).

b) $< f(x), f(y) > - < x, y >=< x, u >< y, u > (2\lambda + \lambda^2 \|u\|^2)$. *Cette quantité est nulle pour tous* $x, y \in E$ *(en particulier pour* $x = y = u$*) ssi* $2\lambda + \lambda^2 \|u\|^2 = 0$, *i.e.* $\lambda = 0$ *ou* $\lambda = -2/\|u\|^2$.

c) $f(x) = x - 2 < x, v > v$ *avec* $v = u/\|u\|$. *On reconnaît immédiatement la symétrie orthogonale par rapport à* $v^\perp = u^\perp$.

Exercice 5. Dans un espace euclidien E de dimension 4 muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$U := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que u est un élément du groupe orthogonal $O(E)$.

b) Calculer la trace et le déterminant de u.

c) Montrer que 1 est valeur propre de u et déterminer le sous-espace propre correspondant.

d) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de u.

e) Soient $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $G = F^\perp$. Montrer que $u(G) = G$. Préciser les restrictions de u à F et G.
Solution.

a) Les colonnes de U *sont de norme* 1 *et orthogonales deux à deux.*

b) $trace(u) = 2$, $det(u) = 1$.

c) $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ *est le plan d'équations* $z = x, t = y$ *(donc* 1 *est valeur propre au moins double).*

d) D'après b, les deux autres valeurs propres sont λ, μ *avec* $2 = 1 + 1 + \lambda + \mu$ *et* $1 = 1.1.\lambda.\mu$, *i.e. ce sont* $\pm i$.

e) $u(F) = F$ *et* u *est orthogonal, donc* $u(G) = G$. *La restriction de* u *à* F *est l'identité. La restriction de* u *au plan* G *est un endomorphisme orthogonal de valeurs propres* $\pm i$ *donc une rotation, d'un quart de tour (les valeurs propres d'une rotation du plan d'angle* θ *sont* $e^{\pm i\theta}$*).*

Exercice 6. Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, on considère l'application linéaire f de matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soit $V = U/3$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de V.

b) Montrer que V est diagonalisable, donner ses valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres correspondants.

c) Montrer que f est la composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ que l'on déterminera.
Solution. (c immédiat)

a) $det(U - \lambda I) = (3 - \lambda)(\lambda + 3)^2$ *donc* $det(V - \lambda I) = \frac{1}{3^3} det(U - 3\lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda + 1)^2$.

b) V *(comme* U*) est réelle symétrique, donc diagonalisable. De plus* V *est orthogonale. C'est donc la symétrie orthogonale par rapport à la droite* $\Delta = \mathrm{Ker}(V - I) = \mathbf{R}(2, 1, 1)$ *(d'où* $\mathrm{Ker}(V + I) =$ *le plan* $\Delta^\perp$, *d'équation* $2x + y + z = 0$*).*

Exercice 7. Soit l'espace euclidien orienté usuel $\mathbf{R}^3$ (la base canonique est donc orthonormée directe). Caractériser les endomorphismes u_i dont les matrices dans cette base sont :

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, M_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution : M_1 est orthogonale (ses trois vecteurs colonnes sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux), et le sous-espace propre associé à 1 est la droite engendrée par $k := (1,1,1)/\sqrt{3}$. Donc u_1 est une rotation autour de k, dont il reste à déterminer l'angle θ (on sait déjà que $1 + 2\cos\theta = Tr(M_1) = 2$ donc $\theta = \pm\pi/3$). Choisissons un vecteur normé i dans le plan $k^\perp$, par exemple $i = (1,-1,0)/\sqrt{2}$, et posons $j = k \wedge i = (1,1,-2)/\sqrt{6}$, alors $\cos\theta i + \sin\theta j = u_1(i) = (1,0,-1)/\sqrt{2}$, d'où $\theta = \pi/3$.
M_2 est orthogonale et symétrique, donc u_2 est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace propre associé à 1, qui est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
$M_3 = -R$ où R est la matrice de la permutation circulaire $e_1 \to e_3 \to e_2 \to e_1$, qui laisse fixe le vecteur $e_1 + e_2 + e_3$. Donc R est la matrice d'une rotation r autour du vecteur $k := (1,1,1)/\sqrt{3}$, dont il reste à déterminer l'angle θ (on sait déjà que $1 + 2\cos\theta = Tr(R) = -Tr(M_3) = 0$ donc $\theta = \pm 2\pi/3$ (modulo 2π), ou (autre argument) $R^3 = I$ et $R \neq I$ donc $3\theta = 2k\pi$ avec k entier relatif non divisible par 3). On peut appliquer la même méthode que pour M_1 pour finir de déterminer θ, ou raisonner plus géométriquement. On trouve $\theta = -2\pi/3$. Donc $u_3 = -r$ où r est la rotation d'angle $-2\pi/3$ autour de k, ou encore : u_3 est la composée de la rotation d'angle $-2\pi/3 + \pi = \pi/3$ autour de k et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $k^\perp$. Autrement dit, $u_3 = u_2 \circ u_1 = u_1 \circ u_2$. On peut d'ailleurs vérifier que $M_1M_2 = M_2M_1 = M_3$.

Exercice 8. Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, muni du produit scalaire $< P,Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ ($\forall P,Q \in E$). Soit $\Phi : E \to E, P(X) \mapsto P(-X)$.

a) Montrer que Φ est une application linéaire autoadjointe.

b) Trouver une base orthonormale propre pour Φ.
Solution.

a) *$< \Phi(P),Q >=< P,\Phi(Q) >$ (par changement de variable $s = -t$).*

b) $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{id}_E)$ = *le plan des polynômes pairs, et* $\mathrm{Ker}(\Phi + \mathrm{id}_E)$ = *celui (orthogonal) des polynômes impairs. On applique donc le procédé d'orthonormalisation à $(X^2,1)$ et à (X^3,X).*
$\|X^2\|^2 = 2/5$ *donc* $e_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}X^2$.
$e_2 = aX^2 + b$ *avec* $0 =< e_2, X^2 >= 2(a/5 + b/3)$ *i.e.* $(a,b) = \lambda(5,-3)$, *et* $1 = \|e_2\|^2 = \lambda^2\|5X^2 - 3\|^2 = 2\lambda^2(5 - 10 + 9) = 8\lambda^2$, *d'où* $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$ *et* $e_2 = \pm\frac{5X^2-3}{2\sqrt{2}}$.
$\|X^3\|^2 = 2/7$ *donc* $e_3 = \sqrt{\frac{7}{2}}X^3$.
$e_4 = cX^3 + dX$ *avec* $0 =< e_4, X^3 >= 2(c/7 + d/5)$ *i.e.* $(c,d) = \mu(7,-5)$, *et* $1 = \|e_4\|^2 = \mu^2\|7X^3 - 5X\|^2 = 2\mu^2(7 - 14 + 25/3) = 8\mu^2/3$, *d'où* $\mu = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$ *et* $e_4 = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}(7X^3 - 5X)$.