UPS, Licence MIA Math-Méca 3ème semestre, TD d'algèbre 2,

Feuille 4 (novembre 2007) CORRIGE

Exercice 1.

a) $2f = (f^2 + f) - (f^2 - f) = 0$.

b) f annule $pgcd(X^5 - 1, X^2 - 2X + 1) = X - 1$.

c) f annule $pgcd(X(X-1)(X+1), X(X-1)^2, (X-1)^2(X+1)) = X - 1$.

Exercice 2.

a) Le polynôme minimal de f divise $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ donc est scindé à racines simples.

b,c) $\mathrm{id}_V = f \circ g = g \circ f$ pour $g = \frac{3\mathrm{id}_V - f}{2}$, donc f est un isomorphisme et $f^{-1} = g$.

d,e) $f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_V$ où $a_n X + b_n$ est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$, i.e. $1 = a_n + b_n$ et $2^n = 2a_n + b_n$, i.e. $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$ (en particulier $a_3 = 7$ et $b_3 = -6$).

Exercice 3. (cf feuille 3, exercice 2) $P^{-1}AP = B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Posons $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$, ainsi $X' = AX \Leftrightarrow Y' = BY \Leftrightarrow f' = 0, g' = 4g + h, h' = 4h \Leftrightarrow f(t) = \alpha, h(t) = \beta e^{4t}, g(t) = k(t)e^{4t}$ avec $k' = \beta$ i.e. $k(t) = \beta t + \gamma$ i.e. $g(t) = (\beta t + \gamma)e^{4t}$, et $X = PY$ i.e. $x = f + 2g, y = f + h, z = 2g + h$ i.e. $x(t) = \alpha + 2(\beta t + \gamma)e^{4t}, y(t) = \alpha + \beta e^{4t}, z(t) = (2\beta t + 2\gamma + \beta)e^{4t}$.

Exercice 4.

a) D'après l'hypothèse et le rappel, $m = X^p$ avec $1 \leq p \leq n$, $P = (-1)^n X^n$.

b) $f^p = 0$ donc pour toute valeur propre λ, $\lambda^p = 0$ donc $\lambda = 0$. Donc 0 est la seule valeur propre, donc $Ker(f)$ est le seul s.e.v. propre, donc si f est diagonalisable, $E = Ker(f)$, i.e. $f = 0$. Variante : m n'a que des racines simples donc $p = 1$ donc le polynôme X annule f, i.e. $f = 0$.

Exercice 5. Pour que φ soit bilinéaire il faut en particulier que $\forall x \in E, \varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = 0$ c'est-à-dire $a\|x\|^2 = c\|x\|^2$, même lorsque $\|x\|^2 \neq 0$ c'est-à-dire même lorsque $x \neq 0$. Il faut donc que $a = c = 0$. Moyennant quoi, $\varphi = b < , >$ dont φ est bilinéaire symétrique, et c'est un produit scalaire ssi (de plus) $b > 0$.

Exercice 6. (Cauchy-Schwarz)

a) $\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$. Egalité ssi $a/6 = b/3 = c/2$.

b) $2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$. Egalité ssi $a/2 = b/3 = c/4 \geq 0$.

c) $\sqrt{3} < 7$. Egalité ssi $a = b = c = 0$.

d) $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Egalité ssi $c = 0$ et $a/3 = b/4 \geq 0$.

Exercice 7.

a) Soient $x = (\sqrt{a_i}), y = (\frac{1}{\sqrt{a_i}}) \in \mathbf{R}^n$. Cauchy-Schwarz donne l'inégalité voulue.

b) Egalité ssi x, y colinéaires et $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, i.e. ssi $a_i = 1/n$.

c) rien (exemple $a_1 = -1$, $a_2 = 2$).

Exercice 8.

a) Les hypothèses impliquent $\|u(x)\| = \|x\|$. En développant $\|u(x) - u(y)\|^2 = \|x - y\|^2$ on en déduit $< u(x), u(y) >=< x, y >$.

b) D'après (a) (en développant puis en regroupant) $\|u(x+y)-u(x)-u(y)\|^2 = \|(x+y)-x-y\|^2 = 0$ et $\|u(\lambda x) - \lambda u(x)\|^2 = \|\lambda x - \lambda x\|^2 = 0$ i.e. u linéaire.

c) Comme $\|u(x)\| = \|x\|$, $Ker(u) = \{0\}$ donc u est injective.

d) Découle de b et c. Remarque : en appliquant la propriété $< u(x), u(y) >=< x, y >$ à $z = u(x), x = u^{-1}(z)$, on trouve alors $\forall z \in E, < z, u(y) >=< u^{-1}(z), y >$, i.e. $u^{-1} = u^*$.

e) $E = \mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire pour lequel la base $(1, X, X^2, \ldots)$ est orthonormée, et $u \in L(E)$ défini par $u(P) = XP$.

Exercice 9. (a) : immédiat.

b) Pour $P = \sum a_i X^i$ et $Q = \sum b_j X^j$ on trouve $< P, Q >= \sum_{0 \leq i,j \leq n} \frac{a_i b_j}{i+j+1}$, d'où $\|P\| = \sqrt{\sum \frac{a_i a_j}{i+j+1}}$.

c) $|cc' + \frac{bc'+cb'}{2} + \frac{ac'+bb'+ca'}{3} + \frac{ab'+ba'}{4} + \frac{aa'}{5}|^2 \leq [c^2 + bc + \frac{b^2+2ac}{3} + \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{5}][c'^2 + b'c' + \frac{b'^2+2a'c'}{3} + \frac{a'b'}{2} + \frac{a'^2}{5}]$.

d) cf poly, théorème 3.5.1.

e)

$n = 1$) Cherchons $a, b \in \mathbf{R}$ t.q. $\forall a', b' \in \mathbf{R}$, $bb' + \frac{ab'+ba'}{2} + \frac{aa'}{3} = a'/3 + b'$: $b/2 + a/3 = 1/3$, $b + a/2 = 1$ d'où $b = 2, a = -2$, i.e. $Q = -2X + 2$.

$n = 2$) Cherchons $a, b, c \in \mathbf{R}$ t.q. $\forall a', b', c' \in \mathbf{R}$, $cc' + \frac{bc'+cb'}{2} + \frac{ac'+bb'+ca'}{3} + \frac{ab'+ba'}{4} + \frac{aa'}{5} = a'/9 + b'/3 + c'$: $c/3 + b/4 + a/5 = 1/9$, $c/2 + b/3 + a/4 = 1/3$, $c + b/2 + a/3 = 1$ d'où $c = 1/3, b = 8, a = -10$, i.e. $Q = -10X^2 + 8X + 1/3$.

$n = 3$) Cherchons $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ t.q. $\forall a', b', c', d' \in \mathbf{R}$, $dd' + \frac{cd'+dc'}{2} + \frac{bd'+cc'+db'}{3} + \frac{ad'+bc'+cb'+da'}{4} + \frac{ac'+bb'+ca'}{5} + \frac{ab'+ba'}{6} + \frac{aa'}{7} = a'/27 + b'/9 + c'/3 + d'$: $d/4 + c/5 + b/6 + a/7 = 1/27$, $d/3 + c/4 + b/5 + a/6 = 1/9$, $d/2 + c/3 + b/4 + a/5 = 1/3$, $d + c/2 + b/3 + a/4 = 1$ d'où $a = 4.5.7.11/27 = 1540/27$, $b = -4.5.43/9 = -860/9$, $c = 4.5.19/9 = 380/9$, $d = -4.17/27 = -68/27$.

Exercice 10.

a) $p(x) \in F$ et $p(x) - x \perp F$ donc $p(x) = \sum \lambda_i e_i$ et $\forall i, \lambda_i =< p(x), e_i >=< x, e_i >$, d'où $p(x) = \sum < x, e_i > e_i$. On en déduit facilement l'expression de $q(x) = x - p(x)$, de $s(x) = 2p(x) - x$, et de $t(x) = 2q(x) - x = x - 2p(x) = -s(x)$.

b) $F^\perp$ est la droite engendrée par $u := (1, 2, -3)$. Posons $e = u/\sqrt{14}$.
D'après a), $q(x) =< x, e > e =< x, u > u/14 = \frac{x_1+2x_2-3x_3}{14}(1, 2, -3)$ donc la matrice de q est $Q = \begin{pmatrix} 1/14 & 1/7 & -3/14 \\ 1/7 & 2/7 & -3/7 \\ -3/14 & -3/7 & 9/14 \end{pmatrix}$, donc celle de p est $P = I - Q = \begin{pmatrix} 13/14 & -1/7 & 3/14 \\ -1/7 & 5/7 & 3/7 \\ 3/14 & 3/7 & 5/14 \end{pmatrix}$ et celle de s est $S = I - 2Q = \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 3/7 & 6/7 & -2/7 \end{pmatrix}$.