Ch. II VALEURS PROPRES ET DIAGONALISATION DE MATRICES PARTICULIÈRES

1. Valeurs propres de matrices symétriques réelles, de matrices antisymétriques réelles, de matrices orthogonales.

2. Valeurs propres de matrices hermitiennes, de matrices antihermitiennes, de matrices unitaires.

3. Matrices semidéfinies positives, définies positives : définitions, valeurs propres.

4. Quid de la diagonalisation des matrices symétriques, antisymétriques, hermitiennes, antihermitiennes, unitaires ?

1. Valeurs propres de matrices symétriques réelles, de matrices antisymétriques réelles, de matrices orthogonales.

Dans ce paragraphe, toutes les matrices sont à coefficients réels.

1.1 Matrices symétriques, antisymétriques.

Rappelons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique lorsque $A^T = A$, dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$. Une matrice quelconque peut être écrite comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique ; en effet

$$A = B + C, \quad B := \frac{A + A^T}{2}, \quad C = \frac{A - A^T}{2}, \tag{1}$$

où B est symétrique et C antisymétrique.

Voici un premier résultat important, qui sera démontré plus loin.

> THÉORÈME 1
>
> (a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors toutes ses valeurs propres sont réelles.
>
> (b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors toutes ses valeurs propres sont imaginaires pures.

Voila donc une information importante sur ces deux classes de matrices, à noter avant de commencer un calcul quelconque. Ainsi, dans la décomposition (1), $A = B + C$, avec

$$\operatorname{spect} B \subset \mathbb{R}, \quad \operatorname{spect} C \subset i\mathbb{R},$$

ce qui fait penser à la décomposition d'un nombre complexe z,

$$z = a + ib, \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } ib \in i\mathbb{R}.$$

1.2 Matrices orthogonales

Rappelons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale lorsque $A^T = A^{-1}$, ce qui équivaut à $A^T A = I_n$ (ou $A A^T = I_n$), ou encore au fait que les vecteurs-lignes de A (ou vecteurs-colonnes de A) forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Première constatation : Si A est orthogonale, alors

$$\det A = +1 \text{ ou } -1. \tag{2}$$

Ceci se voit facilement grâce au fait que

$$\begin{aligned} \text{dét}\,(A^T A) &= \text{dét}\, I_n = 1 \text{ d'une part,} \\ &= \text{dét}\,(A^T)\,\text{dét}\, A = (\text{dét}\, A)^2 \text{ d'autre part.} \end{aligned}$$

Notons que

- si A est orthogonale, il en est de même de A^{-1} ;
- si A et B sont orthogonales, il en est de même de AB.

Ceci a déjà été observé mais, en cas de doute, il est conseillé de refaire la démonstration.

> THÉORÈME 2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, les valeurs propres de A sont soit réelles, soit complexes conjuguées, et toutes de module égal à 1.

La première partie du résultat n'est pas nouvelle, elle est due au fait que A est à coefficients réels, donc le polynôme caractéristique P_A de A est à coefficients réels. La deuxième partie sera démontrée plus loin.

Illustrations des résultats pour $n = 2$.

- Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Son polynôme caractéristique est

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - c^2).$$

Alors, le discriminant Δ vaut $(a+b)^2 - 4(ab-c^2) = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$. On est bien assuré d'avoir des racines de P_A (donc des valeurs propres de A) qui sont réelles.

- Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Alors $P_A(\lambda) = \lambda^2 + b^2$, de sorte que $\text{spect}\, A = \{ib, -ib\}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. On a vu en TD comment ces matrices sont faites, il y en a de deux types :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \tag{3}$$

ou bien

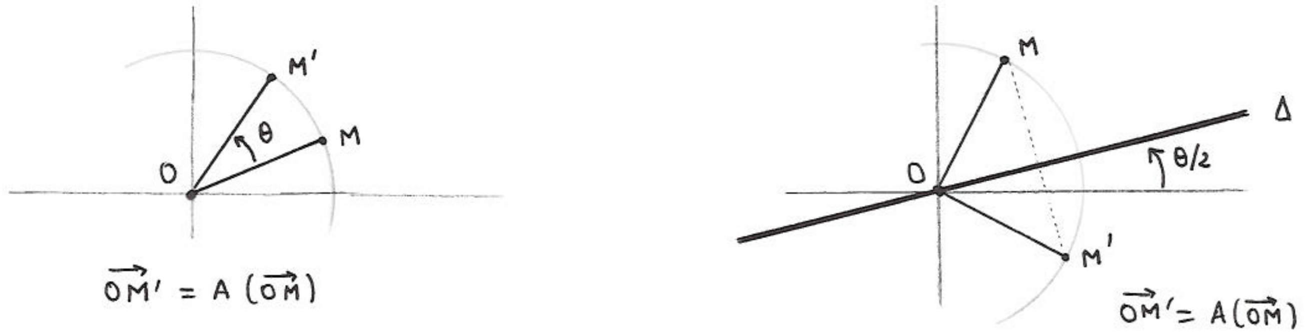
$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \theta \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Concernant la première classe, celle décrite en (3) :

$$\text{dét}\, A = +1, \quad \text{spect}\, A = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}.$$

Géométriquement, $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ représente une rotation de centre O et d'angle θ (cf. schéma ci-dessous, (α)).

(α)



Concernant la deuxième classe, celle décrite en (4) :

$$\text{dét } A = -1, \quad \text{spect } A = \{-1, +1\}.$$

Géométriquement, $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ représente une symétrie (ou réflexion) d'axe la droite Δ d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$ (cf. schéma au-dessus, (β)).

Lorsque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale, $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ conserve les longueurs, les produits scalaires (et donc les écarts angulaires de vecteurs) :

$$\| A\vec{v} \| = \| \vec{v} \| \quad , \quad \langle A\vec{v}_1, A\vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \tag{5}$$

2. Valeurs propres de matrices hermitiennes, de matrices antihermitiennes, de matrices unitaires.

Ce paragraphe est le pendant complexe du paragraphe précédent.

2.1 Matrices hermitiennes, antihermitiennes.

Rappelons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne lorsque $A^* = A$, dite antihermitienne lorsque $A^* = -A$. Lorsque A est à coefficients réels, on retrouve les notions de symétrie et d'antisymétrie. Une matrice quelconque peut être écrite comme la somme d'une matrice hermitienne et d'une matrice antihermitienne ; en effet

$$A = B + C, \quad B = \frac{A + A^*}{2}, \quad C = \frac{A - A^*}{2}, \tag{6}$$

où B est hermitienne et C antihermitienne. Cette décomposition (6) n'est rien de plus que la version complexe de (1).

> THÉORÈME 3
>
> (a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne, alors toutes ses valeurs propres sont réelles.
>
> (b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est antihermitienne, alors toutes ses valeurs propres sont imaginaires pures.

Ce théorème englobe donc le Théorème 1.

<u>Démonstration</u>. Notons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ le vecteur (ou vecteur-colonne) de $\mathbb{C}^n$ constitué des nombres complexes $z_1, \dots, z_n$. Nous utiliserons constamment $\overline{Z}^T A Z$ lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Avant d'aller plus loin, voyons ce que cela donne dans le cas $n = 2$. Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$\overline{Z}^T A Z = [\bar{z}_1 \bar{z}_2] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = a_{11} \bar{z}_1 z_1 + a_{21} \bar{z}_2 z_1 + a_{12} \bar{z}_1 z_2 + a_{22} \bar{z}_2 z_2 \quad \text{(à vérifier !)}$$

$$= a_{11} |z_1|^2 + a_{21} z_1 \bar{z}_2 + a_{12} \bar{z}_1 z_2 + a_{22} |z_2|^2. \qquad (7)$$

De manière générale, soit λ une valeur propre (éventuellement complexe) de A et $Z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ. Alors, par définition,

$$A Z = \lambda Z. \qquad (8)$$

(a) <u>Supposons A hermitienne</u>.

En prémultipliant (8) par $\overline{Z}^T$ on obtient

$$\overline{Z}^T A Z = \lambda \overline{Z}^T Z.$$

Comme $\overline{Z}^T Z = \bar{z}_1 z_1 + \dots + \bar{z}_n z_n = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$ est réel (et non nul puisque Z, vecteur propre, est non nul), on déduit :

$$\lambda = \frac{\overline{Z}^T A Z}{\overline{Z}^T Z}. \qquad (9)$$

Nous allons voir que $\overline{Z}^T A Z$ est réel, ce qui induira que λ est réel.
En effet, le numérateur $\overline{Z}^T A Z$, qui est un scalaire (ou matrice-scalaire), est égal à lui-même après transposition :

$$\left.\begin{aligned} \overline{Z}^T A Z = (\overline{Z}^T A Z)^T &= Z^T A^T \overline{Z} && \text{(règle sur la transposée du produit de matrices)} \\ &= Z^T \overline{A}\, \overline{Z} && \text{(puisque } A^* = A \text{ se traduit par } A^T = \overline{A}\text{)} \\ &= \overline{(\overline{Z}^T A Z)} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

On a donc démontré que $\overline{Z}^T A Z$ est égal à son conjugué, c'est-à-dire qu'il est réel.

(b) <u>Supposons A antihermitienne</u>.

La démonstration est analogue à celle qu'on vient de faire. Puisque $A^* = -A$ se traduit par $A^T = -\overline{A}$, il y a juste un changement de signe dans le processus (10) ; on arrive à

$$\overline{Z}^T A Z = -\overline{(\overline{Z}^T A Z)}.$$

Or, pour un nombre comple $z = a+ib$, dire que $\overline{z} = -z$ (i.e., $a - ib = -a - ib$), c'est dire que sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire qu'il est de la forme ib (un imaginaire pur). □

2.2 Matrices unitaires.

Rappelons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire lorsque $A^* = A^{-1}$, ce qui équivaut à $A^*A = I_n$ (ou $AA^* = I_n$).

Première constatation : Si A est unitaire, alors dét A (qui est un nombre complexe) est de module 1,

$$|\det A| = 1. \tag{11}$$

Cela se voit facilement grâce au fait que

$$\det(A^*A) = \det I_n = 1 \text{ d'une part,}$$
$$= \det(A^*) \cdot \det A = \overline{\det A} \cdot \det A \text{ d'autre part (d'accord ?).}$$

Notons que

- si A est unitaire, il en est de même de A^{-1} ;
- si A et B sont unitaires, il en est de même de AB.

Ceci n'est autre que la version complexe d'énoncés déjà proposés (cf. p. 2 en haut).

> THÉORÈME 4. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est <u>unitaire</u>, les valeurs propres de A sont <u>toutes de module égal à 1</u>.

Ce théorème englobe donc le Théorème 2.

Démonstration. Le point de départ est celui de la démonstration du théorème précédent. Partons de (8), $AZ = \lambda Z$, dont nous prenons la conjuguée puis que nous transposons :

$$(AZ = \lambda Z) \Rightarrow (\overline{A}\,\overline{Z} = \overline{\lambda}\,\overline{Z}) \Rightarrow ((\overline{A}\,\overline{Z})^T = \overline{\lambda}\,\overline{Z}^T).$$

Par suite,

$$(\overline{A}\,\overline{Z})^T \cdot AZ = (\overline{\lambda}\,\overline{Z}^T) \cdot (\lambda Z) = |\lambda|^2\, \overline{Z}^T Z. \tag{12}$$

Comme A est unitaire, $\overline{A}^T = A^{-1}$, de sorte que le membre de gauche au-dessus devient

$$(\overline{A}\,\overline{Z})^T \cdot AZ = (\overline{Z}^T \overline{A}^T) \cdot AZ = \overline{Z}^T A^{-1} A Z = \overline{Z}^T Z. \tag{13}$$

Avec (12) et le fait que $\overline{Z}^T Z = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \neq 0$ (car Z est un vecteur propre, donc non nul), on arrive à $|\lambda|^2 = 1$, soit $|\lambda| = 1$. □

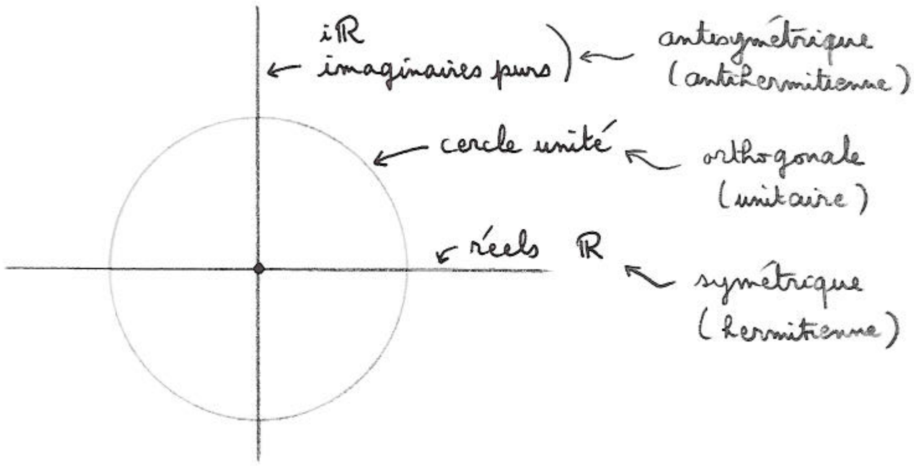
Mise en garde !

A et B symétriques (ou hermitiennes) $\not\Rightarrow$ AB symétrique (ou hermitienne)

A et B orthogonales (ou unitaires) $\not\Rightarrow$ A+B orthogonale (ou unitaire).

Schéma résumé

Matrice	Spectre	Analogie dans le plan complexe
A symétrique à coefficients réels A hermitienne	contenu dans $\mathbb{R}$	nombres réels
A antisymétrique à coefficients réels A antihermitienne	contenu dans $i\mathbb{R}$	nombres complexes imaginaires purs
A (à coefficients réels) orthogonale A unitaire	contenu dans le cercle $\{\lambda \in \mathbb{C} ; \lvert\lambda\rvert = 1\}$	nombres complexes de module 1.



Matrice vs spectre.

3. Matrices semidéfinies positives, définies positives : définitions, valeurs propres.

Dans les Sciences de l'ingénieur, on a besoin d'étendre aux matrices A la notion de positivité, celle connue sur les réels ($a \geqslant 0$, $a > 0$). La première tentation est de considérer que $A = [a_{ij}]$ est "positive" si tous les coefficients a_{ij} de A sont positifs. Il s'avère que cette notion a peu d'intérêt et ne correspond pas à ce que l'on voudrait sur des matrices. Ce qui va se trouver essentiel est la fonction

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto q_A(x) := X^T A X. \tag{14}$$

Avant d'aller plus loin, voyons comment les choses marchent pour $n = 2$.
Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$(x,y) \longmapsto [x\, y]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a_{11} x^2 + (a_{12} + a_{21})\, xy + a_{22} y^2$$
$$= a_{11} x^2 + 2 \left(\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\right) xy + a_{22} y^2.$$

Ceci indique qu'on aurait obtenu la même chose à l'arrivée en remplaçant A par sa version symétrisée $\frac{A + A^T}{2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b \\ b & a_{22} \end{bmatrix}$, où $b = \frac{a_{12}+a_{21}}{2}$. En clair, on ne perd rien en ne considérant que des matrices A symétriques.

Soit donc $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$q_A : (x,y) \longmapsto q_A(x,y) = X^T A X = a x^2 + 2b\, xy + c y^2. \tag{15}$$

Attention au fait suivant : c'est b dans la matrice A et 2b dans l'expression de $q_A(x,y)$ [comme si c'était un double produit].
q_A s'appelle la forme quadratique associée à la matrice (symétrique) A
[quadratique car la somme des puissances apparaissant sur les variables x et y est 2 : $x^2 = x^2 y^0$ $(2+0=2)$, xy $(1+1=2)$, $y^2 = x^0 y^2$ $(0+2=2)$. Une forme linéaire $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est, elle, de la forme

$$l : (x,y) \longmapsto l(x,y) = a x + b y ;$$

les puissances apparaissant sur les variables x et y est 1.]

De manière générale, une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction q_A associée (de manière unique, sans ambiguïté) à une matrice symétrique

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto q_A(x) := X^T A X. \tag{16}$$

Ceci peut être noté de diverses manières suivant les ouvrages et les contextes d'utilisation :

$$X^T A X, \quad x^T A x, \quad \langle Ax, x \rangle, \quad (Ax \mid x), \text{ etc.}$$

Si on développe (16) de manière à faire apparaître les variables $x_1, \dots, x_n$, on obtient

$$\begin{aligned} q_A(x) = {} & \left. a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 \right\} \text{ (termes dits "carrés")} \\ & \left. \begin{aligned} & + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + \dots + 2 a_{1n} x_1 x_n \\ & + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{24} x_2 x_4 + \dots + 2 a_{2n} x_2 x_n \\ & + \cdots \end{aligned} \right\} \text{ (termes dits "rectangles")} \end{aligned}$$

<u>Définition</u>. On dit que la matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est <u>définie positive</u> lorsque

$$X^T A X > 0 \quad \text{pour tout } X \neq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

qu'elle est <u>semidéfinie positive</u> (on dit aussi positive) lorsque

$$X^T A X \geqslant 0 \quad \text{pour tout } X \in \mathbb{R}^n.$$

Bref, on définit la "positivité" de A via la forme quadratique associée à A.
Notations parfois utilisées :

$$A \succ 0 \quad \text{pour "A est définie positive"},$$
$$A \succcurlyeq 0 \quad \text{pour "A est semidéfinie positive"}.$$

Il s'avère que ceci est la bonne notion de positivité que nous cherchions ; elle est utilisée en Optimisation, Probabilités-Statistique (matrices de variance-covariance), Réseaux électriques (résistances généralisées), etc.

Question à présent : <u>qu'en est-il du spectre (= ensemble des valeurs propres) d'une matrice définie positive (ou semidéfinie positive)</u> ? Les valeurs propres de A symétrique sont réelles ; la réponse à la question précédente est d'une grande cohérence et facile à retenir :

$$(A \text{ définie positive}) \iff (\text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont } > 0) ; \tag{18}$$

$$(A \text{ semidéfinie positive}) \iff (\text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont } \geqslant 0). \tag{19}$$

Ainsi,

$$(A \text{ définie positive}) \iff \begin{pmatrix} A \text{ est semidéfinie positive} \\ \text{et} \\ A \text{ est inversible} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Nous allons démontrer ces résultats, très en détail, pour $n = 2$.

<u>THÉORÈME 5</u>. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont les valeurs propres (qui sont réelles) sont notées λ_1 et λ_2.

<u>Partie 1</u> : <u>caractérisation de la définie positivité de A.</u>

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $q_A(x,y) = X^T A X = ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$;

(ii) $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$;

(iii) $\operatorname{tr} A = a + c > 0$ et $\det A = ac - b^2 > 0$;

(iv) $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

<u>Partie 2</u> : <u>caractérisation de la semidéfinie positivité de A.</u>

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

(i)' $q_A(x,y) = X^T A X = ax^2 + 2bxy + cy^2 \geqslant 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii)' $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ et $ac - b^2 \geqslant 0$;

(iii)' $\operatorname{tr} A = a + c \geqslant 0$ et $\det A = ac - b^2 \geqslant 0$;

(iv)' $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_2 \geqslant 0$.

Attention à la différence (un peu subtile) entre (ii) et (ii)' : avoir $a \geqslant 0$ et $ac - b^2 \geqslant 0$ ne suffirait pas à assurer que A est semidéfinie positive (exemple avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$).

<u>Démonstration de la Partie 1.</u>

<u>[(i) ⇒ (ii)]</u>. Prenons $(x,y) = (1,0)$; ainsi $q_A(1,0) = a > 0$. De même, en prenant $(x,y) = (0,1)$, on obtiendrait (bien que non demandé) $q_A(0,1) = c > 0$.

Ecrivons à présent $ax^2 + 2bxy + cy^2$ sous la forme de somme de deux carrés :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2. \tag{21}$$

En faisant le choix particulier $(x,y) = \left(-\frac{b}{a}, 1\right)$, de manière à "tuer" le terme $\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2$ dans (21), on obtient :

$$q_A(x,y) = \frac{ac - b^2}{a} > 0,$$

d'où $ac - b^2 > 0$.

<u>[(ii) ⇒ (iii)]</u>. ($a > 0$ et $ac > b^2$) implique $c > 0$. Il est donc clair que (ii) ⇒ (iii).

<u>[(iii) ⇒ (iv)]</u>. Puisque $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = a + c$ et $\lambda_1 \lambda_2 = \det A = ac - b^2$: la condition $ac - b^2 > 0$ implique que λ_1 et λ_2 ne sont pas nuls et sont de même signe ;

la condition $\lambda_1+\lambda_2>0$ implique que λ_1 et λ_2 sont tous deux strictement positifs.

[(iv) ⇒ (i)]. Si $\lambda_1>0$ et $\lambda_2>0$, on a : $a+c=\lambda_1+\lambda_2>0$ et $ac-b^2=\lambda_1\lambda_2>0$, ce qui implique notamment que $a>0$. Par suite,

$$q_A(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2 \geqslant 0 \text{ pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Reste un dernier point à vérifier : $(q_A(x,y)=0) \Leftrightarrow ((x,y)=(0,0))$.
En effet, $(x,y)=(0,0)$ équivaut à $(x+\frac{b}{a}y, y)=(0,0)$, ce qui fait que la quantité au-dessus n'est nulle que si $(x,y)=(0,0)$. □

4. Quid de la diagonalisation des matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales, hermitiennes, antihermitiennes, unitaires ?

Une bonne nouvelle : les matrices d'un des six types étudiés aux § 1 et 2 sont diagonalisables (à condition d'accepter des matrices P à coefficients complexes, évidemment) ; il existe $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n), \tag{22}$$

$\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ étant le spectre de A. En fait, on va être plus précis sur les matrices P qu'on peut utiliser pour arriver à (22), suivant le type de matrices A.
Les deux théorèmes qui vont suivre, fort importants, sont admis sans démonstration dans le cadre de ce Cours.

THÉORÈME 6. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Il existe alors P orthogonale telle que $P^{-1}AP\ (=P^TAP)=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

On reviendra sur ce théorème et son utilisation, au chapitre suivant.

THÉORÈME 7. Soit A antisymétrique, ou orthogonale, ou hermitienne, ou antihermitienne, ou unitaire. Il existe alors P unitaire telle que $P^{-1}AP=(P^*AP)=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

Et pour une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en général, que peut-on dire ?
– On sait reconnaître les matrices A diagonalisables à l'aide d'une matrice unitaire P, comme dans le Théorème 7. Ces matrices sont dites <u>normales</u>, elles ne font pas partie de notre programme d'études (en L2).

– A défaut de diagonaliser, on peut toujours triangulariser (ou trigonaliser) A. Le résultat suivant précise celui annoncé à la fin du Chap. I (p.22)

<u>Factorisation de SCHUR</u> : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe P unitaire telle que $P^{-1} A P \ (= P^* A P) = T$ matrice triangulaire.

A l'occasion de ses études, le lecteur-étudiant aura l'occasion de voir diverses formes de factorisation d'une matrice A, c'est-à-dire d'expressions de A comme produits de matrices plus simples ; c'est tout l'objet de l'Analyse numérique matricielle.

Mais, au fond, y a-t-il "beaucoup" de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Mentionnons pour le fun le résultat d'approximation suivant : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite (A_k) de matrices diagonalisables (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) telle que

$$A_k \longrightarrow A \quad \text{quand } k \to +\infty$$

(ce qui signifie $(A_k)_{ij} \to A_{ij}$ quand $k \to +\infty$, pour tout (i,j)).