Chap. IV

INTÉGRALES CURVILIGNES.

" Nothing is more practical than a good theory "

H. HELMHOLTZ

1. COMPLÉMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE.

1.1 Le rotationnel.

Dans les chapitres précédents, on a vu (ou revu) les définitions (et quelques propriétés) du gradient, de la divergence, du laplacien... Il manque à notre panoplie un autre concept, vu en Physique ou Mécanique en L1, c'est celui de rotationnel. On le reprend ici.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, soit

$$\vec{F} : (x,y,z) \in \Omega \longmapsto \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

continûment différentiable (au moins) sur Ω.

La matrice jacobienne de $\vec{F}$ en (x,y,z), notons-là J (cf. Chap. III, p. 10), n'est pas symétrique a priori ; son défaut de symétrie est mesuré d'une certaine manière par $J - J^T$, qui a la forme suivante

$$J - J^T = \begin{bmatrix} 0 & -r & -q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice, $R := J - J^T$, est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, celle d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, de la forme $\vec{u} \longmapsto \vec{\omega} \wedge \vec{u}$ où $\vec{\omega}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de composantes (p, q, r) (il y a un théorème de mathématiques qui affirme cela). D'où la définition que voici.

Définition 1. On appelle rotationnel de $\vec{F}$ (on dit aussi tourbillon) la fonction vectorielle (de (x,y,z)), notée $\vec{\text{rot}}\,\vec{F}$ et définie par

$$(x,y,z) \longmapsto \vec{\text{rot}}\,\vec{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

(On adapte sans difficulté la définition au cas très particulier où $\vec{F} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).

La flèche sur rot est pour rappeler, si nécessaire, qu'il s'agit d'un vecteur ; on voit aussi parfois le graphisme $\vec{\text{rot}}\,\vec{F}$... Comme div $\vec{F}$, $\vec{\text{rot}}\,\vec{F}$ a une signification physique bien précise ; pour ce qui nous concerne, on verra dans le dernier chapitre du Cours la relation importante entre $\vec{F}$ et $\vec{\text{rot}}\,\vec{F}$ (le théorème de STOKES).

Notation dans la littérature anglo-saxonne : $\vec{\text{curl}}\,\vec{F}$ ("curl of $\vec{F}$").

Comme dans le cas du produit vectoriel (Chap. II, p. 15), il y a un moyen mnémotechnique de retenir la construction de $\vec{\text{rot}}\,\vec{F}$ (même s'il s'agit en l'espèce d'un abus d'écriture :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix},$$

ce qui explique la notation $\nabla \wedge \vec{F}$ parfois utilisée pour $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F}$ (en effet, ∇ est "de composantes" $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, tandis que $\vec{F}$ est de composantes f, g, h).

Quand $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$, on dit que (le champ) $\vec{F}$ est <u>irrotationnel</u> (et non irrationnel comme je l'ai vu sur des copies ...).

<u>Premiers exemples de règles de calcul</u> (immédiats à partir des définitions) :

- $$\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{\nabla} f) = \vec{0} \qquad (3)$$

(si $\vec{F}$ est un champ de gradients, i.e. $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ pour une certaine fonction numérique f, alors il est irrotationnel).

- $$\mathrm{div}\,(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F}) = 0 \qquad (4)$$

(la divergence d'un champ $\vec{G}$ qui est déjà un tourbillon, $\vec{G} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F}$, est nulle).

1.2 "<u>Bestiaire" d'Analyse vectorielle.</u>

Ayant à notre disposition la notion de gradient ($\vec{\nabla} f$), de divergence ($\mathrm{div}\vec{F}$), de laplacien (Δf), et enfin de rotationnel ($\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F}$), on est à même d'établir un formulaire de calculs ... Ce faisant, il faut bien garder à l'esprit (et au moment où on écrit) ce qui est à valeurs <u>numériques</u> (= réelles) et ce qui est à valeurs <u>vectorielles</u>. En voici quelques exemples.

- Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{div}\,(f \cdot \vec{\nabla} g) = f \cdot \Delta g + \langle \vec{\nabla} f, \vec{\nabla} g \rangle \qquad (5)$$

(d'où $\quad \mathrm{div}\,(f \cdot \vec{\nabla} g) - \mathrm{div}\,(g \cdot \vec{\nabla} f) = f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f$ lorsque $f, g \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$)

- Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $\vec{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\mathrm{div}\,(f \cdot \vec{F}) = f \cdot \mathrm{div}\vec{F} + \langle \vec{\nabla} f, \vec{F} \rangle \qquad (6)$$

(dont (5) est un cas particulier, avec $\vec{F} = \vec{\nabla} g$).

- Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $\vec{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f.\vec{F}) = \vec{\nabla} f \wedge \vec{F} + f.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} \tag{7}$$

- Si $\vec{F}, \vec{G} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\mathrm{div}\,(\vec{F} \wedge \vec{G}) = \langle \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}, \vec{G} \rangle - \langle \vec{F}, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{G} \rangle \tag{8}$$

- Si $\vec{F} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}) = -\begin{pmatrix} \Delta f \\ \Delta g \\ \Delta h \end{pmatrix} + \overrightarrow{\nabla\,(\mathrm{div}\vec{F})} \tag{9}$$

etc.

Il n'est pas nécessaire de connaître ces formules par coeur, mais bien de savoir les retrouver rapidement, à la demande.

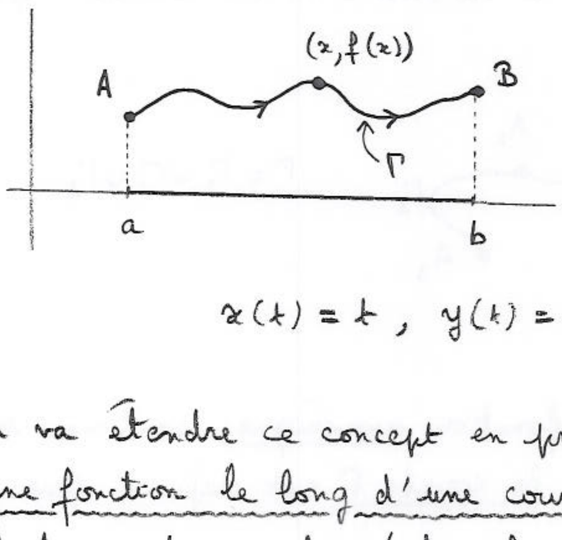
2. INTÉGRALES CURVILIGNES.

2.0 Prolégomènes.

Depuis la classe de Terminale et l'année de L1, on sait donner un sens à (et, parfois, calculer)

$$I := \int_a^b f(x)\,dx, \tag{10}$$

lorsque $f : x \in [a,b] \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a,b]$ (ou seulement continue par morceaux sur $[a,b]$).



Lorsque x va de a à b, le point $(x, f(x))$ parcourt la courbe Γ du point A au point B. On peut considérer que Γ est paramétrée de la manière suivante :

$$x(t) = t, \quad y(t) = f(t), \quad \text{pour } t \in [a,b]. \tag{11}$$

On va étendre ce concept en proposant la définition de "l'intégrale d'une fonction le long d'une courbe". Pour cela, voyons tout d'abord quel type de courbes (du plan ou de l'espace) nous considérerons.

La courbe (ou arc, ou chemin) Γ de l'espace (par exemple) est paramétrée

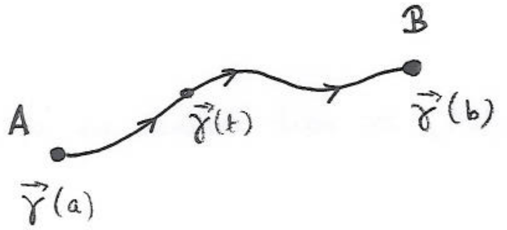
$$t \in [a,b] \longmapsto \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \{ \vec{\gamma}(t) \mid t \in [a,b] \},$$

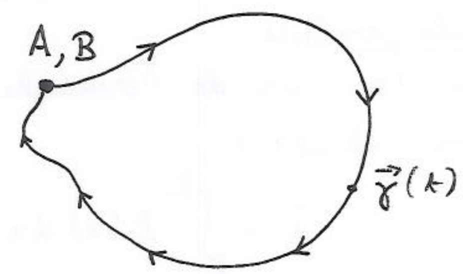
et, pour ce qui nous concerne, on demande à la fonction vectorielle $\vec{\gamma}$ (et donc aux fonctions-composantes x, y, z) de t un certain nombre de propriétés minimales :

- $\vec{\gamma}$ (c'est-à-dire x, y, z) est continûment dérivable.
- $\vec{\gamma}(t_1) \neq \vec{\gamma}(t_2)$ si $t_1 \neq t_2$, seule exception acceptée $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$ (en bref, on ne repasse pas au même endroit à deux dates différentes t_1 et t_2, sauf éventuellement lorsqu'on revient au point de départ).
- $\|\vec{\gamma}\,'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$ (i.e., le vecteur dérivée $\vec{\gamma}\,'(t)$ n'est nul nulle part sur $[a,b]$).

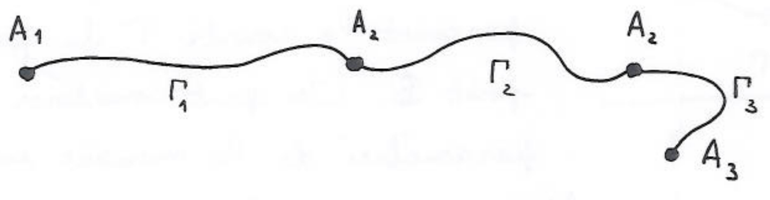
Γ est <u>orientée</u> naturellement en prenant le sens de parcours induit par $t \in [a,b] \longmapsto \vec{\gamma}(t)$; $\vec{\gamma}(a)$ marque le point de départ A, $\vec{\gamma}(b)$ le point d'arrivée B.

Lorsque $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$ (ça arrivera !), on dira que la courbe Γ est <u>fermée</u>.





Les hypothèses faites au-dessus concernant les courbes Γ sont faites d'emblée pour toute la suite ; il n'y aura pas non plus de difficultés à étendre les définitions et propriétés qui vont venir à la situation de courbes "par morceaux comme au-dessus" :



$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

2.1 <u>Intégrale le long de la courbe Γ</u>

<u>Définition 2</u>. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction <u>numérique</u>, continue sur Γ (au moins). <u>L'intégrale de f le long de la courbe Γ</u> est définie par

$$\int_\Gamma f \, d\gamma := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \, . \, \|\vec{\gamma}\,'(t)\| \, dt. \tag{12}$$

La notation $f\, d\gamma$ sans flèches est là pour rappeler qu'il s'agit de <u>scalaires</u> : f est à valeurs réelles ; $d\gamma$ est pour $\|\vec{\gamma}'(t)\|\, dt$, encore un scalaire. Si $f(P)$ représente une densité de charge, une masse, ..., $\int_\Gamma f\, d\gamma$ représente une charge totale, une masse totale, ...

Un exemple important est celui où $f \equiv 1$, auquel cas $\int_\Gamma d\gamma$ est la <u>longueur de la courbe Γ</u> :

$$\boxed{\text{longueur de } \Gamma = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt \qquad (13)}$$

Dans le cas particulier où Γ est le graphe de la fonction qui à $x \in [a,b]$ associe $f(x) \in \mathbb{R}$ (cf. (11)), la longueur de Γ a l'expression suivante :

$$\boxed{\text{longueur de } \Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (14)}$$

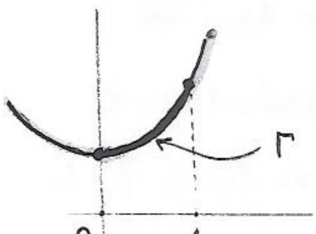
<u>Exemple 3.</u> Longueur du cercle unité.

Ici $\vec{\gamma} : t \in [0, 2\pi] \longmapsto \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Ainsi $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, de sorte que $\|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. En conséquence, pour

$$\Gamma = \{ (\cos t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi] \} \quad (= \text{cercle unité}),$$

$$\text{longueur de } \Gamma = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \quad (\text{bien sûr !}).$$

<u>Exemple 4.</u> Longueur d'un morceau de chaînette.



Soit $\Gamma := \{ (x, \operatorname{ch} x) \mid x \in [0,1] \}$.

Pour $f(x) = \operatorname{ch} x$, on a $f'(x) = \operatorname{sh} x$ et $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \operatorname{ch} x$. D'où

$$\text{longueur de } \Gamma = \int_0^1 \operatorname{ch} x\, dx = [\operatorname{sh} x]_0^1 = \operatorname{sh} 1 = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

<u>Exemple 5.</u> Soit $\Gamma = \{ (x(t), y(t)) \mid x(t) = r(t) \cos t,\ y(t) = r(t) \sin t,\ t \in [a,b] \}$. Calculons la longueur de Γ.

Ici $\vec{\gamma}(t) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$, de sorte que

$$\vec{\gamma}'(t) = (r'(t) \cos t - r(t) \sin t,\ r'(t) \sin t + r(t) \cos t),$$

d'où $\|\vec{\gamma}'(t)\|^2 = [r'(t)]^2 + [r(t)]^2$.

Par suite,

$$\text{longueur de } \Gamma = \int_a^b \sqrt{[r'(t)]^2 + [r(t)]^2}\, dt.$$

2.2 Intégrale (curviligne) de $\vec{F}$ le long de la courbe Γ (*)

Définition 6. Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle (ou champ de vecteurs) de $\mathbb{R}^3$ (par exemple), continue sur Γ. L'intégrale de $\vec{F}$ le long de la courbe Γ est définie par

$$\int_\Gamma < \vec{F}, \vec{d\gamma} > := \int_a^b < \vec{F}(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma}'(t) > dt. \tag{15}$$

On se contente souvent d'une écriture plus ramassée, à savoir $\int_\Gamma \vec{F}\, \vec{d\gamma}$, mais il faut bien se souvenir qu'on intègre (en t) le résultat du produit scalaire du vecteur (de $\mathbb{R}^3$) $\vec{F}(\vec{\gamma}(t))$ et du vecteur $\vec{\gamma}'(t)$.

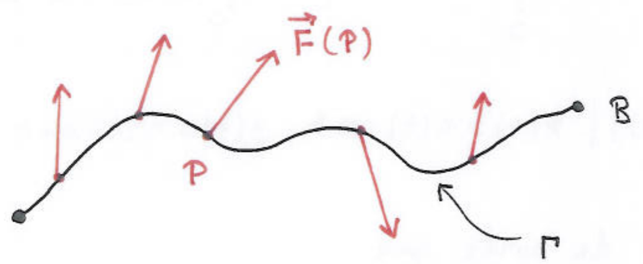
Si $\vec{F}$ a pour composantes (les fonctions) f, g, h, et que $\vec{\gamma}(t)$ a pour composantes (les fonctions) x, y, z, l'intégrale de (15) est détaillée en :

$$\int_a^b \Big[f(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + g(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + h(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) \Big] dt,$$

notée en abrégé $\quad \int_\Gamma (f\, dx + g\, dy + h\, dz)$.

Lorsque Γ est une courbe fermée, on peut marquer ce fait en écrivant $\oint_\Gamma$ au lieu de $\int_\Gamma$.

Les intégrales curvilignes $\int_\Gamma < \vec{F}, \vec{d\gamma} >$ apparaissent fréquemment dans les Sciences de l'ingénieur, notamment en Mécanique où elles représentent le travail (au sens Physique du terme) effectué par le champ de forces $\vec{F}$ le long de la courbe Γ



(*) On dit aussi circulation de $\vec{F}$ sur Γ.

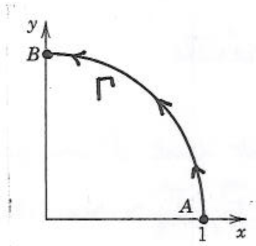
<u>Exemple 7</u> • Soit $\vec{F} : (x,y) \longmapsto \vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} -y \\ -xy \end{pmatrix}$ et Γ l'arc de cercle paramétré par

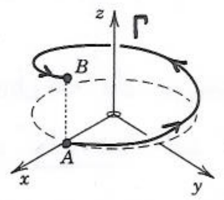
$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

• Soit $\vec{F} : (x,y,z) \longmapsto \vec{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ et Γ l'hélice paramétrée par

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calculons l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle$ dans les deux cas.





Dans le premier cas (en 2D),

$$\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle = \int_0^{\pi/2} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \, \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - \cos^2 t \sin t)\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

Dans le deuxième exemple (en 3D),

$$\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 3t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} (-3t \sin t + \cos^2 t + 3 \sin t)\, dt = 7\pi.$$

Deux questions qui viennent à l'esprit à propos de la Définition 6 :

• La valeur $\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle$ dépend-elle de la paramétrisation $t \longmapsto \vec{\gamma}(t)$ de la courbe Γ ? La réponse est NON.

• La valeur $\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle$ serait-elle différente si on allait de A à B (extrémités de Γ) en suivant un autre chemin Γ_1 ? La réponse est : oui, elle peut être différente. La situation où $\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle$ ne dépend pas du chemin Γ suivi pour rejoindre les deux extrémités A et B est étudiée dans le paragraphe suivant.

<u>Définition 8.</u> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle (ou champ de vecteurs) de $\mathbb{R}^3$ (par exemple) de composantes f, g et h. On dit que $\vec{F}$ <u>dérive d'un potentiel</u> sur Ω s'il existe $\varphi \in C^1(\Omega)$ (φ est alors appelée le <u>potentiel</u>) tel que $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$ (*) ; en clair :

$$\text{sur } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = g, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = h. \tag{16}$$

<u>Exemple 9.</u> Soit $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $\vec{F} : (x,y) \longmapsto \vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} 4x^3y^2 \\ 2x^4y + y \end{pmatrix}$.
Alors, $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, plus précisément $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$, avec

$$\varphi(x,y) = x^4y^2 + \frac{y^2}{2} + C, \quad C \text{ constante réelle.}$$

Bien sûr, tous les champs de vecteurs $\vec{F}$ ne dérivent pas d'un potentiel, mais jouir de cette propriété est <u>la clé</u> qui fera que $\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle$ ne dépendra pas du chemin suivi pour aller d'une extrémité A à l'autre extrémité B (de Γ).

<u>THÉORÈME 10.</u> Soit Ω un <u>domaine</u> de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un <u>ouvert connexe</u> (⁎⁎) de $\mathbb{R}^3$, et $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle (ou champ de vecteurs) continue. Alors, $\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle$ est <u>indépendant du chemin Γ</u> (tracé dans Ω) pour relier ses extrémités A et B <u>si et seulement si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel</u>, c'est-à-dire $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$ pour une certaine fonction $\varphi \in C^1(\Omega)$.

<u>Démonstration (partielle)</u>
Supposons que $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$ pour une certaine fonction φ. Soit $\vec{\gamma} : t \in [a,b] \longmapsto \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ paramétrant la courbe Γ d'extrémités A (de coordonnées celles de $\vec{\gamma}(a)$) et B (de coordonnées celles de $\vec{\gamma}(b)$). On a :

$$\int_\Gamma \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle = \int_a^b \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + \dots \right\} dt . \tag{17}$$

On reconnaît entre $\{ . \}$ sous le signe $\int$ la dérivée en t de la fonction $t \longmapsto \theta(t) := \varphi(x(t), y(t), z(t))$. Par suite, ce qui est en (17) n'est autre que $\varphi(\vec{\gamma}(b)) - \varphi(\vec{\gamma}(a))$ $\left(= \theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \theta'(t)\, dt \right)$.

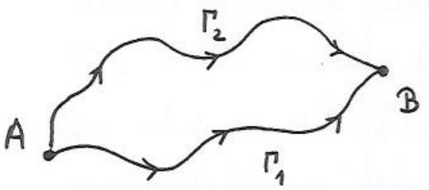
(*) Parfois en Physique on préfère considérer φ tel que $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$.
(⁎⁎) Voir définition et exemples en Annexe.

La réciproque est plus délicate à démontrer, nous l'admettons. ∎

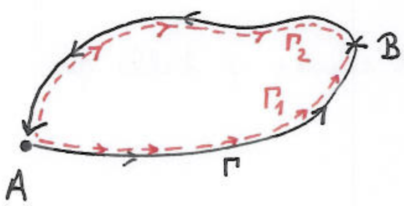
La constatation, simple, qu'en mettant bout à bout deux courbes, l'une (Γ_1) partant de A à B, l'autre (Γ_2) partant de B à A, on construit une courbe fermée Γ (voir figure ci-dessous), conduit à la variante suivante du Théorème 10.

THÉORÈME 10'. Sous les hypothèses du Théorème 10, $\vec{F}$ dérive d'un potentiel (sur Ω) si et seulement si $\oint_\Gamma \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = 0$ pour toute courbe <u>fermée</u> tracée dans Ω.

Démonstration (succincte).



– Pour aller de A à B, on suit les deux chemins Γ_1 et Γ_2. Soit Γ la courbe fermée obtenue en adjoignant à Γ_1 la courbe Γ_2 parcourue dans le sens inverse. Par hypothèse, $\int_\Gamma \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = 0$; mais ici $\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2}$, d'où $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$.

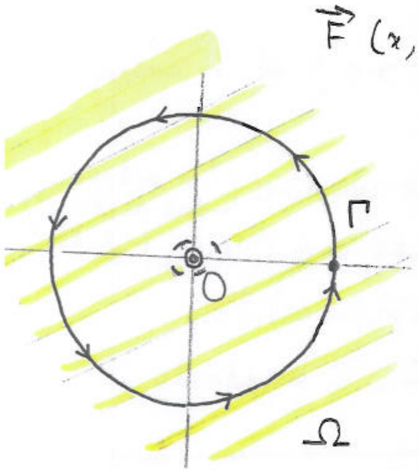


– Réciproque. Soit Γ une courbe fermée bouclant en A. Avec un point B sur Γ, on crée artificiellement deux courbes Γ_1 et Γ_2, allant toutes les deux de A à B. Par hypothèse, $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$, d'où

$$\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} = 0.$$ ∎

<u>Exemple 11.</u> Soit $\Omega := \mathbb{R}^2$ privé du point origine O ; Ω est bien un domaine (= ouvert connexe) de $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction vectorielle (ou champ de vecteurs) définie comme suit :

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ g(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \tag{18}$$



Soit Γ paramétrée par

$$\vec{\gamma} : t \in [0, 2\pi] \longmapsto \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Γ est une courbe fermée tracée dans Ω (c'est le cercle de centre O et de rayon 1).

Calculons $\int_\Gamma \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle$. Le calcul est facile :

$$\int_\Gamma \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 . dt = 2\pi \ (\neq 0).$$

Donc, d'après le Théorème 10', $\vec{F}$ ne dérive pas d'un potentiel sur Ω, i.e. il n'existe pas de $\varphi \in C^1(\Omega)$ telle que $\vec{F} = \vec{\nabla\varphi}$ <u>sur Ω</u> (ce qui n'empêche pas que ça puisse l'être sur un domaine $\Omega_1 \subset \Omega$!).
Le choix de Γ est volontairement "vicieux" ici : Γ est allé entourer la "singularité" O.

2.3 <u>Caractérisation d'un champ dérivant d'un potentiel à l'aide de son rotationnel.</u>

"Dériver d'un potentiel", c'est bien beau... mais comment le savoir à la seule donnée de $\vec{F}$ et de Ω ? C'est l'objet de cette dernière partie.
On a vu que si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel φ sur Ω, alors $\vec{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$ (cf. (3) en p.3, $\vec{\text{rot}}\,(\vec{\nabla\varphi}) = \vec{0}$ dès que $\varphi \in C^2(\Omega)$). Et si cela suffisait ?
Pas tout à fait... il faut exiger de Ω une propriété supplémentaire, celle d'être simplement connexe (*).

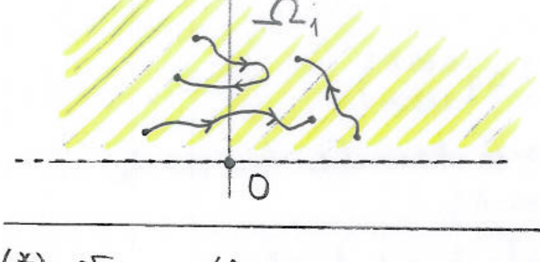
THÉORÈME 12 Soit Ω un domaine <u>simplement connexe</u>. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\vec{F}$ dérive d'un potentiel sur Ω (i.e., il existe φ telle que $\vec{F} = \vec{\nabla\varphi}$ sur Ω).

(ii) $\vec{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$ sur Ω.

Résultat [(ii) $\Rightarrow$ (i)] admis pour le moment ; on y reviendra à l'occasion du théorème de STOKES (au dernier chapitre).
Le domaine Ω de l'Exemple 11 "entoure un trou", il n'est pas simplement connexe... donc le Théorème 12 ne s'applique pas.

<u>Exemple 11 revisited...</u> Soit $\Omega_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ et $\vec{F}$ comme dans l'Exemple 11 (formule (18)).



Ω_1 est à présent simplement connexe ("n'entoure pas de trou") $\vec{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$ sur Ω_1, et il existe $\varphi \in C^1(\Omega_1)$ telle que $\vec{F} = \vec{\nabla\varphi}$ sur Ω_1 (cf. Théorème 12). Ici,

$$\varphi(x,y) = -\text{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + C, \ C \text{ constante}.$$

(*) Voir définition et exemples en Annexe.

Remarque. Une manière équivalente de dire que $\vec{F}$ est irrotationnel (i.e., $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$) sur Ω est : la matrice jacobienne de $\vec{F}$ est symétrique en tout point de Ω. Ainsi :

- Pour un champ $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$, il y a une seule condition à respecter : $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$.
- Pour un champ $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longmapsto \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{pmatrix}$, il y a trois conditions à valider (cf. Chap. III, p. 10) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y} \qquad (19)$$

Un mot des "formes différentielles" (hors programme).

Un symbolisme comme " $\alpha = P\,dx + Q\,dy$ " (= α est "une forme différentielle (de degré 1) sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$"), cela signifie quoi ? Tout ce qu'on vous demande de savoir est :

P et Q sont deux fonctions numériques continues (de x, y) sur Ω, et pour tout $(x,y) \in \Omega$, $\alpha(x,y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, i.e.,

$$\alpha(x,y) : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \alpha(x,y)\,(u,v) = P(x,y)\,u + Q(x,y)\,v.$$

Exemple (Chap. III, p. 8) : si $f \in C^1(\Omega)$, $\alpha = df$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

La forme différentielle α est dite exacte sur Ω s'il existe $f \in C^1(\Omega)$ telle que $\alpha = df$. D'après ce que nous avons vu en haut de page (et dans le Théorème 12), pour que α soit exacte il faut et il suffit (avec des Ω pas n'importe comment) que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (condition de "compatibilité" qui ne fait que traduire que le champ $\vec{F} = \binom{P}{Q}$ doit être irrotationnel).

Exemple 13. Soit $\vec{F} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3y^2 \\ 2x^4y + y \end{pmatrix}$. Montrons que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$ et trouvons un tel potentiel.

Mettons-nous dans le contexte du Théorème 12 : $\Omega = \mathbb{R}^2$ est simplement connexe et $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F}(x,y) = 8x^3y - 8x^3y = 0$ pour tout $(x,y) \in \Omega$.

Le potentiel φ cherché est tel que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 4x^3y \; , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 2x^4y + y.$$

En "primitivant" la première équation par rapport à la variable x, on obtient

$$\varphi(x,y) = x^4 y^2 + \theta(y).$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à y et en remettant dans la deuxième équation, on arrive à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 2x^4 y + \theta'(y) = 2x^4 y + y,$$

d'où

$$\theta(y) = \frac{y^2}{2} + C, \quad C \text{ constante.}$$

En définitive,

$$\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \varphi(x,y) = x^4 y^2 + \frac{y^2}{2} + C.$$

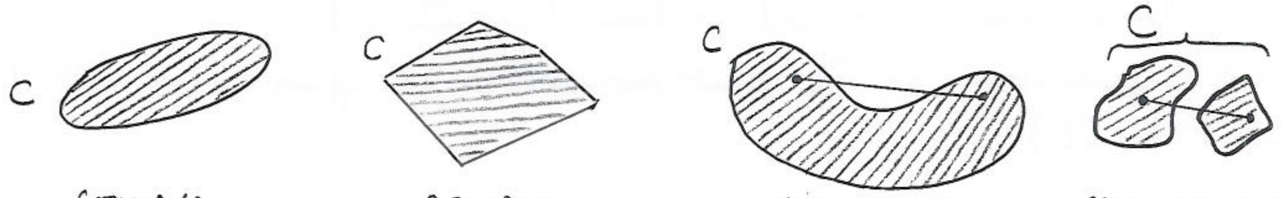
Vous pouvez vérifier ...

ANNEXE.

• <u>Convexité</u>. On dit que $C \subset \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) est <u>convexe</u> si

$$\left(\begin{matrix} x \in C, \ y \in C \\ t \in [0,1] \end{matrix} \right) \Rightarrow \left(tx + (1-t)y \in C \right).$$

En termes géométriques, cela se traduit par : tout segment de droite joignant deux points de C est entièrement contenu dans C.



convexe — convexe — non convexe — non convexe

• <u>Connexité</u>. Notion censée traduire mathématiquement qu'un ensemble est "d'un seul tenant".

On dit qu'un ensemble $C \subset \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) est <u>connexe</u> (par arcs) si, pour tout x, y dans C, il existe une courbe Γ, paramétrée par $\vec{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \Gamma$ <u>continue</u>, joignant $x = \vec{\gamma}(a)$ à $y = \vec{\gamma}(b)$ qui est entièrement contenue dans C.

Ce qui est convexe est forcément connexe ; il suffit en effet de considérer $\vec{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \Gamma$ qui à t associe $tx + (1-t)y$ ("on va tout droit de x à y").

connexe — non connexe

Ω est un <u>domaine</u> de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) si Ω est à la fois <u>ouvert et connexe</u>.

• <u>Simple connexité</u>. Soit Ω un <u>domaine</u> de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), on dit que Ω est <u>simplement connexe</u> si "toute courbe fermée Γ de Ω peut être déformée de façon continue jusqu'à se réduire à un point, tout cela sans quitter Ω".

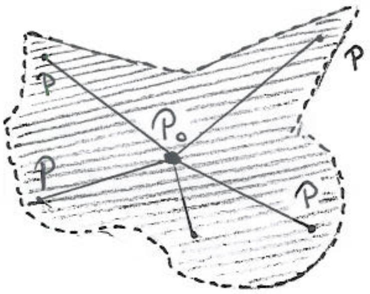
De façon intuitive, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est simplement connexe s'il "n'entoure pas de trou" (attention, ce n'est plus le cas dans $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ est simplement connexe !).

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$

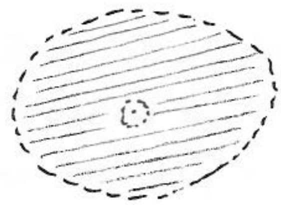
non simplement connexe — simplement connexe.

Lorsque Ω est un domaine borné, une manière de voir s'il est simplement connexe ou pas est d'utiliser la caractérisation suivante : Ω est simplement connexe si et seulement si son complémentaire Ω^c est connexe.

Il y a une notion plus simple (et aussi plus forte) que la simple connexité, c'est celle d'ensemble étoilé. On dit qu'un ouvert Ω est étoilé s'il existe un point $P_0 \in \Omega$ tel que, pour tout point $P \in \Omega$, le segment P_0P soit contenu dans Ω (En clair, un gardien positionné en P_0 peut surveiller Ω puisqu'il voit tout point P de Ω).



étoilé



non étoilé

Ω étoilé est connexe : pour aller de $P_1 \in \Omega$ à $P_2 \in \Omega$ il suffit de suivre le chemin $P_1 P_0 P_2$ qui est entièrement contenu dans Ω.
Un montre aussi qu'un domaine étoilé est simplement connexe.